



Universidad de Sevilla

Trabajo fin de grado

Efecto Compton inverso inducido por electrones libres y fotones de la Radiación Cósmica de Fondo

Autora :

Dña. Raquel Agüera Rodríguez

Profesor :

D. Manuel Lozano Leyva

*A todos aquellos compañeros y amigos que
han estado ahí estos cuatro años, especialmente
a Riu y Pablo, por su ayuda tan necesaria con Matlab;
a Chechu, por dedicar más tiempo a ayudarme que a sí mismo;
a Manuel Lozano, por toda su ayuda y por ofrecer este tema tan acertado.*

*Y sobre todo a mi madre y a mi hermana por su paciencia infinita,
y a mi padre, por enseñarme desde pequeña a comprender las matemáticas.*

Sin ellos, este trabajo no habría sido posible.

Índice general

Resumen	1
1. Dispersión elástica de partículas	3
1.1. El efecto Compton	3
1.1.1. Efecto Compton vs. efecto Thomson	6
1.1.2. Estudio de la sección eficaz: la ecuación de Klein-Nishina	6
1.2. El efecto Compton inverso: ICS	9
1.2.1. Potencia dispersada por un electrón	13
1.2.2. Potencia emitida por radiación sincrotrón	17
1.3. Aplicaciones generales del SCI	19
1.3.1. Fluorescencia de resonancia nuclear NRF	19
1.3.2. Detección nuclear mediante rayos gamma	21
1.3.3. Producción de isótopos con aplicaciones médicas	21
2. Aplicaciones en astrofísica del SCI	23
2.1. La radiación cósmica de fondo	23
2.2. Rayos cósmicos	24
2.3. Galaxias activas y radiogalaxias	26

3. El efecto Sunyaev-Zeldóvich	29
3.1. Cálculo del efecto Sunyaev-Zeldóvich	30
3.2. Aplicación a una población no térmica de electrones	35
3.3. Electrones térmicos: la ecuación Kompaneets	42
3.4. Comparación entre electrones térmicos y no térmicos	43
3.5. SZE dinámico: galaxias en movimiento	46
 Conclusiones	 49
 Bibliografía	 51

Resumen

En el proceso de dispersión de dos partículas podemos encontrar gran variedad de situaciones distintas. Todas ellas dependen de factores como son sus masas, sus velocidades iniciales, y multitud de parámetros más. Nuestro estudio se basa en la interacción de dos partículas bien conocidas: el electrón y el cuanto de radiación electromagnética, el fotón. Ambos pueden interactuar de diversas maneras, aunque nos centraremos en la dispersión mediante el efecto Compton. Una de sus variaciones, el conocido como efecto Compton inverso, se manifiesta en fenómenos en su mayoría astrofísicos. De todos ellos, sin duda el más impresionante es el efecto Sunyaev-Zeldóvich, por el cuál los fotones procedentes de la radiación cósmica de fondo (CMB, por sus siglas en inglés) son dispersados a longitudes de onda mayores debido a la colisión con los electrones relativistas en el entorno de determinadas galaxias.

Nuestro objetivo por tanto será el análisis de este efecto, haciendo hincapié en su aplicación al efecto Sunyaev-Zeldóvich (de aquí en adelante, SZE, de nuevo, por sus siglas en inglés), obteniendo la expresión del desplazamiento de la frecuencia de la radiación CMB.

Capítulo 1

Dispersión elástica de partículas

1.1. El efecto Compton

En el año 1923, un físico y profesor estadounidense llamado Arthur Holly Compton dedicado a la investigación de los rayos X descubrió uno de los efectos más importantes de la teoría cuántica: el efecto Compton. El descubrimiento le hizo ganar, años más tarde, el premio Nobel de Física. Este efecto explica el cambio en la dirección y longitud de onda de un fotón tras colisionar con un electrón (ya sea libre o ligado a una capa de un átomo), demostrando así la naturaleza no solo de onda sino también de partícula de la radiación electromagnética. Tras hacer incidir un haz de rayos X sobre un bloque de carbón, Compton se asombró al comprobar que, dependiendo del ángulo con el que fuesen dispersados los distintos rayos, la energía de cada uno de ellos iba variando y por tanto, también lo hacía su longitud de onda. Por ello, la radiación electromagnética cede parte de su energía a una partícula cargada, en este caso el electrón.

Si de esta forma se consideraba a la luz (y con ello, los fotones que la conforman) como materia, debían cumplirse estrictamente los principios de conservación del momento y la energía en la colisión con el electrón. Esquemáticamente, la colisión elástica se observa en la figura 1.1, donde se tiene en cuenta el electrón en reposo en el estado inicial.

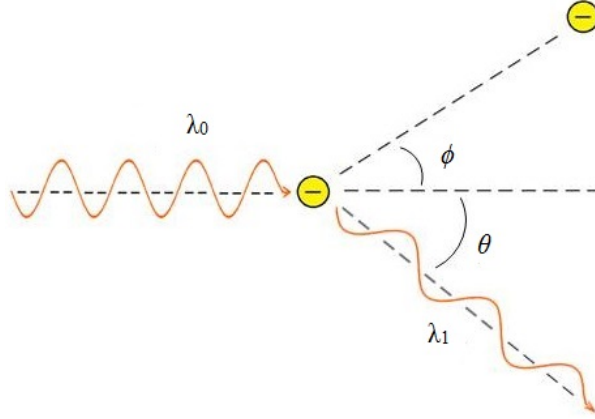


Figura 1.1: Esquema de la dispersión por efecto Compton.

La deducción de la expresión para el incremento de la longitud de onda de la radiación resulta directa a partir de estos dos principios:

· **Conservación del momento**

$$p_0 = p_1 \cos \theta + p_2 \cos \phi \quad (1.1)$$

$$p_1 \sin \theta = p_2 \sin \phi, \quad (1.2)$$

donde el subíndice 0 se refiere al fotón incidente, 1 al fotón tras la colisión y 2 al electrón tras la colisión. Elevando al cuadrado ambas expresiones y sumándolas se obtiene la ecuación:

$$p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos \theta = p_2^2, \quad (1.3)$$

que relaciona los momentos de las partículas que interaccionan en el estado inicial y final.

· **Conservación de la energía**

$$E_0 + m_e c^2 = T_e + m_e c^2 + E_1, \quad (1.4)$$

donde E_0 y E_1 son las energías del fotón antes y después de la colisión, respectivamente; y T_e la energía cinética final del electrón. A su vez, esta puede relacionarse con el momento del fotón a partir de la expresión:

$$p = \frac{E}{c}, \quad (1.5)$$

por lo que la expresión (1.4) queda reducida a:

$$T_e = (p_0 - p_1)c \quad (1.6)$$

A partir de la expresión relativista de la energía de un electrón puede obtenerse la energía cinética T_e de este en función de su momento, en este caso p_2 :

$$E^2 = c^2 p_2^2 + m_e^2 c^4 \quad (1.7)$$

$$(T_e + m_e c^2)^2 = c^2 p_2^2 + m_e^2 c^4 \quad (1.8)$$

Despejando p_2^2 en función de T_e e introduciéndolo en la expresión (1.3) junto con (1.6) obtenemos la ecuación:

$$m_e c(p_0 - p_1) = p_0 p_1 (1 - \cos \theta) \quad (1.9)$$

Simplificando la expresión anterior teniendo en cuenta la relación entre el momento del fotón y su longitud de onda $p = \frac{h}{\lambda}$:

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \frac{1}{m_e c} (1 - \cos \theta), \quad (1.10)$$

que es la expresión del efecto Compton. Se suele simplificar la constante $\frac{h}{m_e c}$ como λ_c , que se conoce como la longitud de onda Compton y cuyo valor es:

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 0,0242 \text{ \AA} \quad (1.11)$$

Así, la expresión (1.10) muestra cómo se modifica la longitud de onda del fotón incidente en función del ángulo θ con el que sale dispersado respecto de la dirección inicial. Puede comprobarse, sin gran dificultad, que el incremento de la longitud de onda tras la colisión es máximo en el caso de $\theta = 180^\circ$, es decir, cuando el fotón “rebota” con el electrón y vuelve por el mismo camino pero en sentido contrario; y nula en el caso de que salga en la misma dirección y sentido que en la situación inicial. Obsérvese, además, que en ningún caso $\lambda_1 - \lambda_0$ será negativo, es decir, el fotón tras la colisión siempre perderá energía, puesto que la longitud de onda tras el choque será mayor que en el estado inicial.

1.1.1. Efecto Compton vs. efecto Thomson

El efecto Compton es, junto con el efecto Thomson, uno de los procesos dispersivos radiación-materia más comunes que se encuentran en la naturaleza. Ambos corresponden al traspaso de energía de la radiación electromagnética a una partícula cargada (normalmente un electrón), pero existe una ligera diferencia entre ambos: el caso de la dispersión Thomson puede considerarse como un límite inferior a la dispersión Compton. En la dispersión Thomson la energía de los fotones es muy pequeña en comparación con la masa del electrón, por lo que la energía tanto de la partícula cargada como la del fotón permanecen inalterables tras la colisión.

Esta pequeña diferencia entre ambos efectos es mayor en el caso del estudio de la sección eficaz de colisión, que estudiaremos en la siguiente sección.

1.1.2. Estudio de la sección eficaz: la ecuación de Klein-Nishina

La sección eficaz total se considera como el área efectiva del blanco que “observa” un proyectil dirigiéndose hacia él, por lo que es medida en unidades de área. En el ámbito de la física atómica y la física de partículas, las secciones eficaces varían enormemente dependiendo del número atómico Z de núcleo en cuestión o de la reacción que se produzca, respectivamente. Característica esta magnitud de cualquier colisión, se estudiará a continuación su valor para las dos dispersiones anteriormente vistas: Compton y Thomson.

En el año 1928, los físicos teóricos Oskar Klein y Yoshio Nishina comenzaron el estudio de la dispersión Compton basándose en la ecuación relativista de Paul Dirac, propuesta ese mismo año. El objetivo de ambos fue el cálculo de la sección eficaz diferencial para un electrón tras la colisión con un fotón, resultando así la conocida como ecuación o expresión de Klein-Nishina, que se convirtió en uno de los primeros resultados del estudio de la electrodinámica cuántica. A partir de la mecánica cuántica relativista y la teoría cuántica de campos es posible deducir esta ecuación, cuya expresión es:

$$\sigma(\theta)d\Omega = \frac{1}{2}r_e^2 \left(\frac{\omega'_k}{\omega_k} \right)^2 \left[\frac{\omega'_k}{\omega_k} + \frac{\omega_k}{\omega'_k} - \cos^2 \theta \right] d\Omega \quad (1.12)$$

En esta ecuación, r_e representa el radio clásico del electrón, θ el ángulo de dispersión del fotón, $d\Omega$ el elemento de ángulo sólido, y ω'_k y ω_k representan las frecuencias dependientes del ángulo θ , que se relacionan a partir de la expresión:

$$\omega_{k'} = \frac{\omega_k}{1 + \frac{\omega_k}{m}(1 - \cos \theta)}, \quad \alpha = \frac{\omega_k}{m} \quad (1.13)$$

Esta ecuación resulta útil para obtener la sección eficaz total de una colisión entre la radiación eletromagnética y una partícula libre cargada, siendo inmediato al integrar la ecuación de Klein-Nishina en la totalidad del ángulo sólido [9]. Sin embargo, pueden hacerse varias aproximaciones dependiendo del rango de energías del fotón incidente y en función del valor de α , puesto que este parámetro ofrece una relación entre la energía del fotón antes de la colisión y la energía en reposo del electrón.

· Bajas energías $\omega_k \ll m$, $\omega_k \simeq \omega_{k'}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{1}{2}r_e^2(1 + \cos^2 \theta) \quad (1.14)$$

Este caso de bajas energías del fotón, como se comentó en la sección anterior, se corresponde con una situación de dispersión Thomson del fotón por el electrón libre: el valor de α puede considerarse despreciable (1.13) ya que la energía del fotón es muy pequeña.

Por ello, al integrar la expresión diferencial de la ecuación de Klein-Nishina en esta aproximación a lo largo de todo el ángulo sólido, se obtiene el valor de la sección eficaz total Thomson:

$$\sigma_T = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta \quad (1.15)$$

$$\sigma_T = \frac{8}{3}\pi r_e^2 \quad (1.16)$$

· Altas energías $\omega_k \gg m$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_e^2 \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \left[\frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} + 1 + \alpha(1 - \cos \theta) - \sin^2 \theta \right] \quad (1.17)$$

En este caso, al tratarse de energías altas, predomina la dispersión Compton: el valor de α no es despreciable y por ello no es posible hacer ninguna aproximación.

Al igual que antes, al integrar la expresión (1.17) en todo el ángulo sólido se obtiene la sección eficaz total Compton [9]:

$$\sigma_C = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta \quad (1.18)$$

$$\sigma_C = 2\pi r_e^2 \left[\frac{1 + \alpha}{\alpha^2} \left(\frac{2(1 + \alpha)}{1 + 2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \ln(1 + 2\alpha) \right) + \frac{1}{2\alpha} \ln(1 + 2\alpha) - \frac{1 + 3\alpha}{(1 + 2\alpha)^2} \right] \quad (1.19)$$

La figura (1.2) muestra el cociente entre ambas secciones eficaces en función del parámetro α .

A medida que el valor de α va aumentando progresivamente la función se vuelve cada vez menos simétrica, predominando el scattering “hacia adelante” en el caso de energías muy altas. Esto se puede observar en tres situaciones distintas en la figura (1.3), donde se representa en coordenadas polares la expresión de la sección eficaz diferencial en función del ángulo θ y para distintos valores de α . Cabe destacar el hecho de que, en el caso de $\alpha \rightarrow 0$ (correspondiente a la situación Thomson), la dispersión es totalmente simétrica respecto al ángulo θ , desapareciendo rápidamente esta simetría al aumentar el valor de la energía del fotón (casos de $\alpha = 1, 10$). En la dispersión Compton, como se dijo anteriormente, a medida que aumenta la energía de la radiación incidente es cada vez menos probable que los fotones sean retrodispersados: probabilidad prácticamente nula como se puede observar, a partir del cociente de energías del orden de $\alpha = 10$.

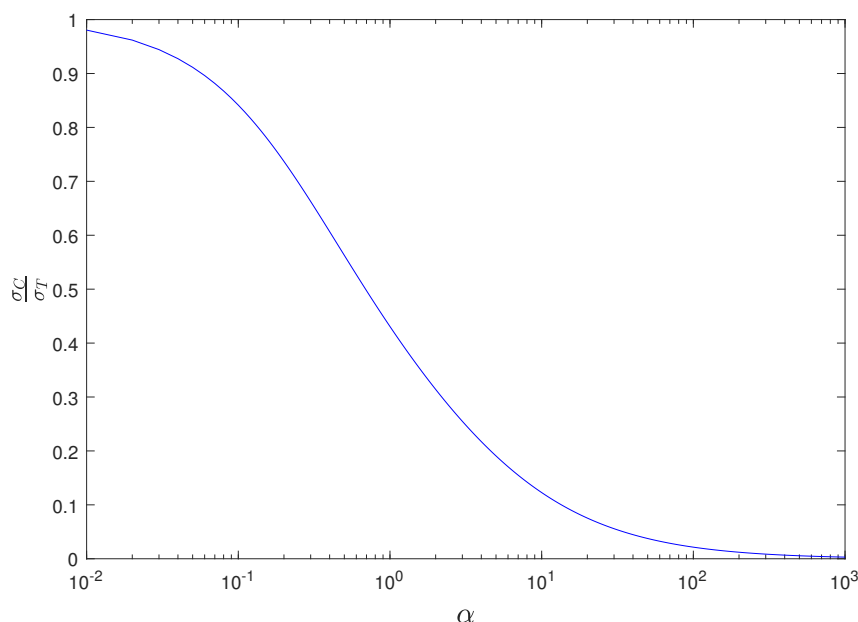


Figura 1.2: Representación semilogarítmica del cociente entre las secciones eficaces Compton (ecuación de Klein-Nishina) y Thomson.

1.2. El efecto Compton inverso: ICS

La dispersión Compton es, como se comentó en secciones anteriores, la disminución de la energía de un cuanto de radiación electromagnética debido a la colisión con una partícula cargada. Por norma general esta partícula cargada, en nuestro caso el electrón, está libre o ligado a un átomo: es la energía del fotón la que determina una dispersión u otra (Compton o Thomson). Sin embargo a estas alturas es normal preguntarse si es posible que se de la situación contraria, es decir: ¿es posible que el fotón gane energía tras la colisión, resultando una disminución de su longitud de onda? La respuesta es sí, y este efecto es conocido como el efecto Compton inverso.

El scattering o efecto Compton inverso (a partir de ahora ICS, por sus siglas en inglés) se produce cuando fotones poco energéticos son dispersados a altas energías por electrones relativistas. Recibe el nombre de inverso puesto que, al contrario que en la dispersión Compton, es el fotón el que gana energía y no el electrón, como puede observarse en la

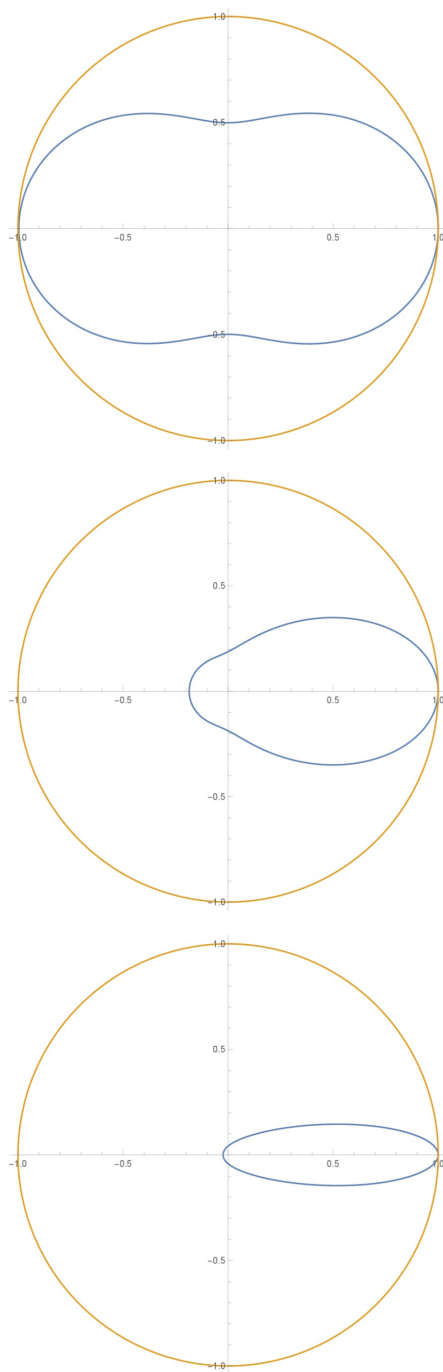


Figura 1.3: Representación polar de la ecuación de Klein-Nishina para valores de $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha = 1$ y $\alpha = 10$ (de arriba a abajo).

figura (1.4) [1].

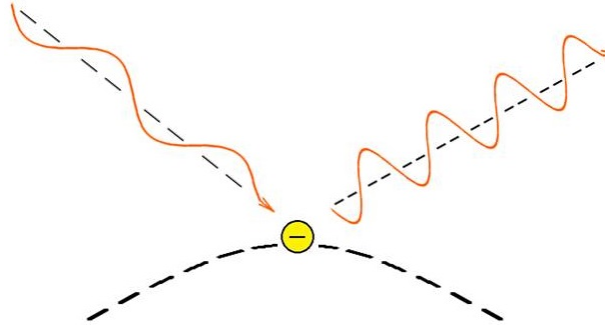


Figura 1.4: Situación de ICS, en el que se observa la disminución de la longitud de onda del fotón tras la colisión.

Ambos procesos pueden considerarse iguales, solo que tratados en sistemas de referencia diferentes. Supongamos que en un proceso de ICS nos situamos en el sistema de referencia donde el electrón relativista está en reposo: en este caso observaremos una situación idéntica a la dispersión Compton ordinaria (o incluso Thomson, puesto que la diferencia entre ambos es tan sólo la energía de la radiación), donde un electrón en reposo “ve” acercarse un fotón con una determinada energía. Tan solo es cuestión de perspectiva. Por ello, para estudiar el ICS podemos tratar las ecuaciones de la dispersión Compton ordinaria y aplicar una transformación de coordenadas mediante transformaciones de Lorentz. Dos sistemas de

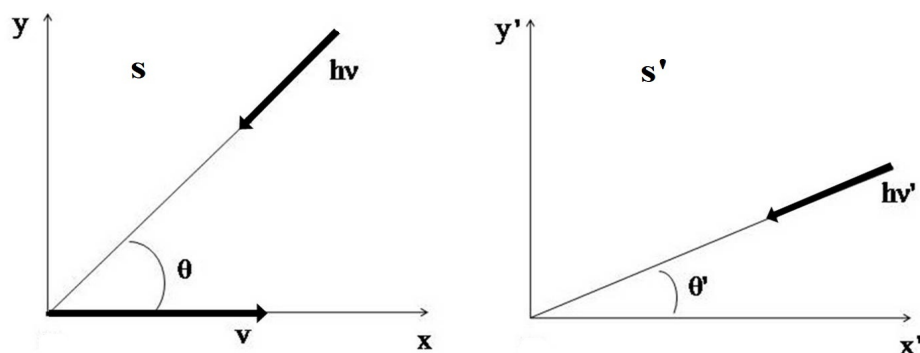


Figura 1.5: Sistemas de referencia laboratorio S , y en reposo respecto al electrón S' .

referencia son claves en la resolución del problema: por un lado el sistema laboratorio S ,

en el que se observa un electrón moviéndose con velocidad v y un fotón de energía $h\nu$ acercándose a este con un ángulo θ respecto al eje x ; y un sistema S' en el que el electrón se encuentra en reposo. Este último, como se dijo anteriormente, “ve” acercarse un fotón con una energía distinta que en el sistema de referencia S ($h\nu'$), y con un ángulo θ' . Ambos sistemas de referencia pueden observarse en la figura (1.5). Una de las primeras preguntas que pueden hacerse es ¿cuál es la relación entre los ángulos θ y θ' en los dos sistemas de referencia? Es un cálculo sencillo teniendo en cuenta las transformaciones de Lorentz de las velocidades [2]:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{1}{c}\beta u_x}, \quad (1.20)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{1}{c}\beta u_x)}, \quad (1.21)$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{1}{c}\beta u_x)}, \quad (1.22)$$

donde γ y β se definen como el factor de Lorentz y el cociente entre la velocidad de una partícula y la velocidad de la luz, respectivamente:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (1.23)$$

Considerando un haz de radiación electromagnética de velocidad c en el plano $X - Y$, los ángulos θ y θ' pueden relacionarse fácilmente con las expresiones anteriores de las velocidades por trigonometría:

$$\frac{u_x}{c} = \cos \theta \quad \frac{u_y}{c} = \sin \theta \quad (1.24)$$

$$\frac{u'_x}{c} = \cos \theta' \quad \frac{u'_y}{c} = \sin \theta' \quad (1.25)$$

Correspondiéndose las ecuaciones (1.24) con el sistema S en reposo, y las ecuaciones (1.25) con el sistema S' en movimiento respecto de S . A partir de estas expresiones y las

obtenidas anteriormente para las velocidades en ambos sistemas, los ángulos θ y θ' pueden relacionarse de la forma:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \quad (1.26)$$

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \quad (1.27)$$

1.2.1. Potencia dispersada por un electrón

Considérese la radiación incidente sobre el electrón como una onda plana, de tal forma que el campo eléctrico de esta onda provoca una aceleración al electrón. Así, según la fórmula de Larmor, esta partícula acelerada debe emitir radiación. Situados en el sistema S' , es fácil deducir que nos encontramos, como se dijo en la sección anterior, en una situación análoga a la dispersión Compton/Thomson. En esta sección consideraremos el caso de la dispersión Thomson para simplificar los cálculos.

El campo eléctrico de la radiación incidente acelerará al electrón, por lo que éste empezará a emitir radiación de acuerdo con la fórmula de Larmor. Este hecho puede interpretarse de otra manera: simplemente como que el electrón “extrae” de la radiación incidente la energía que fluye por la sección eficaz, re-irradiando esa potencia.

Ya que la fórmula de Larmor es válida tan solo en sistemas no relativistas, en nuestra situación podremos aplicarla solo en el sistema de referencia S' , en el que el electrón se encuentra en reposo y ve acercarse un haz de radiación electromagnética. Por ello, la expresión de la potencia de un haz de fotones dispersado por un electrón será, en el sistema S' [3]:

$$P' = \sigma_T c U'_{rad}, \quad (1.28)$$

donde σ_T es la sección eficaz Thomson (calculada en el capítulo anterior), y U'_{rad} la densidad de energía de radiación en el sistema S' .

Nuestro objetivo por tanto es transformar este resultado “no relativista” en el sistema S' al “relativista”, en el que el observador se encuentra en reposo. Es primordial comprender que la potencia (definida como $P = \frac{dE}{dt}$) es un invariante Lorentz, por lo que su valor es independiente del sistema de referencia y puede afirmarse que $P = P'$. Así, nuestros pasos a seguir serán la búsqueda de la expresión de la densidad de energía de la radiación en el sistema inercial S' , para poder obtener así la potencia P .

Supongamos que un electrón se mueve con una velocidad $v = v_x$ en el sistema S . Un haz de fotones incide con un ángulo θ sobre el eje X, que sabemos que en el sistema S' vendrá definido como θ' según las relaciones (1.26) y (1.27). La densidad de energía de esta radiación incidente en ambos sistemas será:

$$U_{rad} = N\hbar\omega = Nh\nu \quad (1.29)$$

$$U'_{rad} = N'\hbar\omega' = N'h\nu' \quad (1.30)$$

Donde N y N' son la densidad de fotones en los sistemas S y S' , respectivamente.

Dicho esto, pasemos a estudiar el movimiento de electrón y fotón en el sistema de referencia S , ilustrado en la figura (1.6).

Consideremos que en S el electrón se mueve de las coordenadas x_1 a la x_2 , en el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 . Dos haces de fotones llegan al origen de S' en los instantes t'_1 y t'_2 : ya que en este sistema el electrón se encuentra en reposo sobre el origen, estos dos fotones llegan en realidad a los puntos x'_1 y x'_2 . Estos eventos pueden relacionarse fácilmente a partir de las transformaciones de Lorentz:

$$(x_1, 0, 0, t_1) = (\gamma vt'_1, 0, 0, \gamma t'_1) \quad (1.31)$$

$$(x_2, 0, 0, t_2) = (\gamma vt'_2, 0, 0, \gamma t'_2) \quad (1.32)$$

Teniendo en cuenta que ambos haces viajan paralelos entre sí, podemos calcular el incremento temporal Δt transcurrido entre la llegada de ambos al plano normal a la dirección

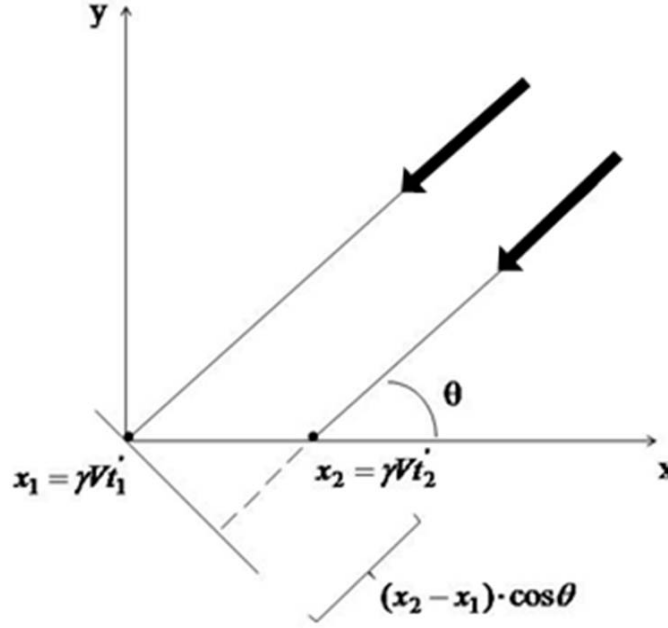


Figura 1.6: Intervalo espacial de la colisión en el sistema de referencia S .

de propagación. Este intervalo de tiempo puede calcularse a partir de las expresiones (1.31) y (1.32):

$$\Delta t = t_2 + \frac{\cos \theta (x_2 - x_1)}{c} - t_1 \quad (1.33)$$

$$\Delta t = \gamma t'_2 + \frac{\cos \theta (t'_2 - t'_1) \gamma v}{c} - \gamma t'_1 \quad (1.34)$$

$$\Delta t = \Delta t' \gamma [1 + \beta \cos \theta] \quad (1.35)$$

Se observa así que el intervalo de tiempo de llegada de los fotones es diferente en ambos sistemas de referencia, siendo menor un factor $\gamma[1 + \beta \cos \theta]$ en el sistema S' . Si relacionamos la frecuencia de ambos fotones con el tiempo, puede obtenerse la expresión del efecto Doppler relativista:

$$\nu' = \nu \gamma [1 + \beta \cos \theta] \quad (1.36)$$

En este caso, se observa que la frecuencia en el sistema en reposo del electrón S' (y con ello, su energía) se ve amplificada un factor $\gamma[1 + \beta \cos \theta]$. Por el mismo razonamiento y siguiendo las ecuaciones (1.29) y (1.30), se obtiene que la densidad de fotones que llegan al origen en ambos sistemas es:

$$N' = N\gamma[1 + \beta \cos \theta], \quad (1.37)$$

pudiendo obtenerse además el valor de la densidad de energía de la radiación por simple comparación entre las ecuaciones:

$$U'_{rad} = N\gamma[1 + \beta \cos \theta]h\nu\gamma[1 + \beta \cos \theta] \quad (1.38)$$

$$U'_{rad} = U_{rad}\gamma^2[1 + \beta \cos \theta]^2 \quad (1.39)$$

Esta densidad de energía está asociada a los fotones que llegan al eje X con un ángulo θ , y como consecuencia hay que tener en cuenta el ángulo sólido sobre el que incide. De nuevo, suponiendo que la radiación es isotrópica al menos en el sistema de referencia laboratorio S , podemos integrar la radiación incidente en ese ángulo sólido:

$$U'_{rad} = \frac{U_{rad}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \gamma^2[1 + \beta \cos \theta]^2 \sin \theta d\theta \quad (1.40)$$

$$U'_{rad} = \frac{4}{3}U_{rad}(\gamma^2 - \frac{1}{4}) \quad (1.41)$$

Sustituyendo entonces en la expresión de partida (1.28), y teniendo en cuenta que $P = P'$, se obtiene que la potencia final de los fotones tras la dispersión por el efecto Compton inverso será:

$$P' = P = (dE/dt)' = dE/dt = \sigma_T c \frac{4}{3} U_{rad} (\gamma^2 - \frac{1}{4}) \quad (1.42)$$

Si queremos conocer el incremento de la potencia del haz, tan sólo debemos restar la potencia inicial antes de la colisión:

$$(dE/dt)|_{IC} = \sigma_T c \frac{4}{3} U_{rad} (\gamma^2 - \frac{1}{4}) - \sigma_T c U_{rad} \quad (1.43)$$

$$(dE/dt)|_{IC} = \frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 \beta^2 U_{rad} \quad (1.44)$$

Que es la potencia neta ganada por la radiación, y perdida por el electrón debida al ICS.

1.2.2. Potencia emitida por radiación sincrotrón

En el año 1947 fue descubierto un tipo de radiación electromagnética en un acelerador de la empresa General Electric, que supuso un antes y un después en el estudio de la electrodinámica. Hablamos de la radiación sincrotrón. Emitida por una partícula cargada relativista, se genera cuando esta se mueve en trayectorias circulares en un campo magnético. Como su nombre indica, puede generarse en un sincrotrón (tipo concreto de acelerador de partículas), o naturalmente en fenómenos astrofísicos como es el caso de supernovas o púlsares, entre otros. Al igual que en el caso del ICS, al tratarse de una carga en movimiento su potencia viene dada por la fórmula de Larmor, que es válida en el límite no relativista [4]:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} a^2, \quad (1.45)$$

donde a es la aceleración de la partícula, y q la carga de esta. Para calcular la aceleración, debemos obtener las expresiones de esta tras aplicar una transformación de Lorentz a las velocidades. Al ser necesario un sistema de referencia en el que el electrón sea no relativista para que la fórmula de Larmor pueda aplicarse, podemos considerar aquel en el que este electrón esté, temporalmente, en reposo, y lo llamaremos S' . Las aceleraciones, por tanto, pueden obtenerse a partir de las expresiones (1.20) a (1.22), teniendo en cuenta que la aceleración es la variación temporal de la velocidad $a = \frac{du}{dt}$, $a' = \frac{du'}{dt'}$:

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3 \left(1 + v \frac{u'_x}{c^2}\right)^3} \quad (1.46)$$

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2 \left(1 + v \frac{u'_x}{c^2}\right)^2} - \frac{\frac{vu'_y a'_x}{c^2}}{\gamma^2 \left(1 + v \frac{u'_x}{c^2}\right)^3} \quad (1.47)$$

$$a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2 \left(1 + v \frac{u'_x}{c^2}\right)^2} - \frac{\frac{vu'_z a'_x}{c^2}}{\gamma^2 \left(1 + v \frac{u'_x}{c^2}\right)^3} \quad (1.48)$$

De esta manera, y tomando que el electrón en el sistema S' se encuentra inicialmente en reposo, se tiene que $v'_x = 0$, $v'_y = 0$ y $v'_z = 0$:

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3}, \quad a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2}, \quad a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2} \quad (1.49)$$

Tomando el campo magnético en la dirección del eje X y el electrón moviéndose en una dirección cualquiera, la aceleración a de la fórmula de Larmor puede tomarse como $a = a_\perp$, y por tanto obtener la expresión de la potencia en el sistema S' :

$$P' = \frac{2}{3} \frac{e^2 a_\perp'^2 \gamma^4}{c^3} \quad (1.50)$$

A partir la expresión de la frecuencia de una partícula en movimiento circular y el radio de Larmor [2]:

$$R_{Larmor} = \frac{mV}{qB}, \quad \omega = \frac{eB}{\gamma mc}, \quad (1.51)$$

es posible obtener la relación entre la aceleración a_\perp y el módulo de la velocidad v del electrón, obteniéndose:

$$a_\perp = \omega v_\alpha = \frac{eBv \sin \alpha}{\gamma mc}, \quad (1.52)$$

donde α se define como el ángulo formado entre la velocidad de la partícula y el campo magnético. Aplicando este resultado a la expresión (1.50), y sustituyendo en función de la sección eficaz Thomson (1.16) llegamos a:

$$P = \sigma_T \frac{\gamma^2}{4\pi} b^2 v^2 \sin^2 \alpha, \quad (1.53)$$

donde se ha tenido en cuenta la relación existente entre el radio del electrón y su masa $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$; y que $P = P'$, como se comentó en la sección anterior. Si además relacionamos la expresión anterior con la energía magnética $U_B = \frac{B^2}{8\pi}$ [2], se obtiene la potencia de radiación sincrotrón emitida por un electrón en una trayectoria circular:

$$P = 2\sigma_T \beta^2 \gamma^2 c \sin^2 \alpha, \quad (1.54)$$

potencia de la que es posible “eliminar” el seno de la expresión si se busca el promedio de esta, integrando P en el ángulo sólido $d\Omega$:

$$\langle \sin^2 \alpha \rangle = \frac{2}{3} \quad (1.55)$$

$$\langle P \rangle = \frac{4}{3} \sigma_T \beta^2 \gamma^2 c U_B \quad (1.56)$$

Parémonos a observar esta última expresión obtenida, y comparémosla con la calculada en el caso del ICS (1.44). Ambas expresiones son idénticas, salvo por el valor de la densidad energética. La razón por la que las potencias son tan similares es debido a que, en ambos casos, el electrón es acelerado por un campo eléctrico que él mismo observa en su sistema en reposo. En el caso de la radiación sincrotrón, este campo eléctrico está asociado con el movimiento del electrón bajo un campo magnético B , tal que $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$. Por el contrario, en el caso del ICS el campo eléctrico es simplemente la suma de los campos de todas las ondas incidentes [2].

1.3. Aplicaciones generales del SCI

El efecto Compton inverso cuenta con una gran cantidad de aplicaciones que no solo se remiten a la astrofísica y la cosmología, sino que tiene una importante presencia en grandes laboratorios, hospitales, centros de investigación nuclear, etc. con el objetivo de generar radiación gamma altamente energética a partir de aceleradores de electrones. En esta sección estudiaremos algunas de estas aplicaciones.

1.3.1. Fluorescencia de resonancia nuclear NRF

La fluorescencia de resonancia nuclear o NRF es un proceso por el cual un núcleo absorbe radiación altamente energética (procedente, en la mayoría de los casos, de un proceso de ICS) y emite posteriormente radiación gamma como resultado de esa excitación.

El procedimiento es simple: un haz de radiación con una amplia distribución de energía se hace atravesar una muestra de un material del que se quiere estudiar su composición, o en el que se desea encontrar restos de un elemento. Con ayuda de un detector puede observarse el espectro de energía resultante, que mostrará una serie de “muescas” debido a la resonancias nucleares. Estas zonas características del espectro pueden ser comparadas con un testigo, que es una lámina del elemento en cuestión que se busca: la disminución en la intensidad de los picos observados al comparar la muestra con la lámina indicará la concentración del isótopo de interés. Esta técnica resulta útil, por ejemplo, para el estudio de la concentración de determinados elementos como son el ^{238}U o ^{239}Pu en materiales como residuos nucleares o combustibles [5]. Un ejemplo puede observarse en la figura (1.7),

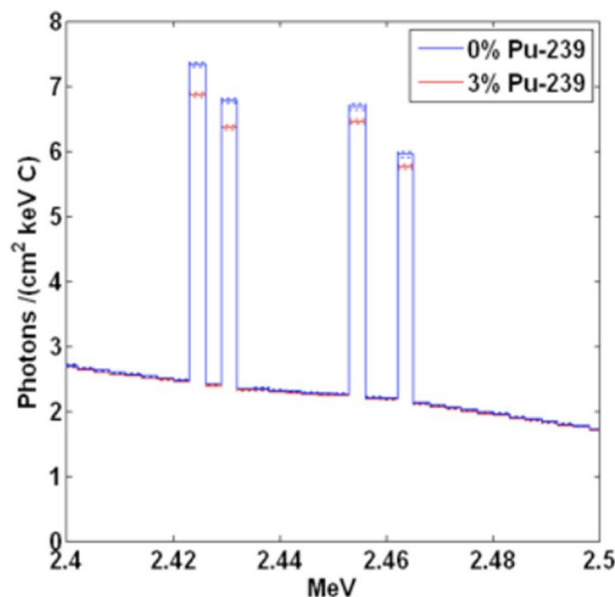


Figura 1.7: Intensidad recibida de dos muestras analizadas con distinta proporción de ^{239}Pu [5].

donde se observa el espectro de “muescas” obtenido para una muestra sin plutonio y otra con una pequeña cantidad de este. Puede observarse una disminución en la intensidad recibida en el caso de la muestra en color rojo, lo que determina cierta cantidad de este elemento en la muestra.

1.3.2. Detección nuclear mediante rayos gamma

Con un objetivo similar al del caso anterior, la técnica de detección nuclear mediante rayos gamma pretende detectar elementos en ciertos materiales, en este caso, a partir de la fotofisión.

Este es un proceso por el cual un núcleo, tras absorber un fotón gamma, se divide en dos o más núcleos más ligeros. A partir de las secciones eficaces y de los fragmentos detectados, es posible conocer el núcleo de procedencia de estos restos, resultando una prueba útil para el estudio de la composición de determinados materiales [6].

1.3.3. Producción de isótopos con aplicaciones médicas

Otra de las aplicaciones del ICS es la creación de determinados radioisótopos útiles en tratamientos médicos, como es el caso del platino ^{195m}Pt [7]. Utilizado en tratamientos de quimioterapia, resulta muy útil y eficiente, pero presenta una alta cantidad de efectos secundarios y es “fácil” para las células cancerosas hacerse resistente a este elemento. Sin embargo, este es uno de los primeros pasos en el mundo de la medicina nuclear para la búsqueda de elementos que ayuden a reducir o curar los efectos de esta enfermedad [8].

Capítulo 2

Aplicaciones en astrofísica del SCI

Ahora que conocemos cuál es el origen del SCI y como se manifiesta, podemos estudiar algunas de las cientos de aplicaciones que tiene este efecto y en qué situaciones se manifiesta. Grosso modo, podemos predecir que todos aquellos fenómenos astrofísicos en los que se vean implicados electrones a altas velocidades podrán ser partícipes de este efecto. En esta sección analizaremos los dos componentes esenciales del SCI, como son la radiación cósmica de fondo o CMB, fuente de los fotones poco energéticos que serán dispersados; y las fuentes de electrones relativistas, siendo las más relevantes los rayos cósmicos y las radiogalaxias.

2.1. La radiación cósmica de fondo

En los años 60, un físico alemán llamado Arno Allan Penzias desarrollaba una nueva antena con gran precisión, cuando observó una fuente de ruido de una longitud de onda de aproximadamente 7.3 cm que por más que intentó reducir mejorando aún más la precisión y el detalle de su antena no pudo evitar. Fue así como descubrió la radiación cósmica de fondo o CMB. Por ello mismo recibió en el año 1978 el premio Nobel de Física junto a su compañero Robert Woodrow Wilson. En ese momento, la CMB tenía una temperatura de 3.5K, que ha ido reduciéndose lentamente hasta los 2.75K de la actualidad [23]. Esto

puede explicarse teniendo en cuenta la actual expansión del universo, puesto que en un origen las altas concentraciones de materia en un universo “comprimido” implicaban que esta radiación de fondo se encontraba a millones de grados.

El universo que nos rodea se encuentra repleto de un baño “casi” isotrópico de esta radiación, que como su nombre indica (Cosmic Microwave Background) es una radiación del orden de las microondas, con un espectro muy similar al del cuerpo negro. Decimos “casi” isotrópico puesto que manifiesta ciertas anisotropías que podrían dar información acerca de la estructura y formación de las galaxias actuales. Se considera que fue emitida hace unos 13.7 billones de años, unos pocos años después del Big Bang, por lo que el estudio de esta radiación puede aportarnos gran cantidad de información acerca del universo en una escala muy larga de tiempos [24].

En nuestro estudio, la CMB es primordial puesto que será la fuente de fotones poco energéticos que necesitamos para estudiar el ICS en el entorno de galaxias muy calientes.

2.2. Rayos cósmicos

En el año 1912, un físico austriaco llamado Victor Hess ascendió hasta más de 5000 metros en un globo aerostático con el fin de medir la ionización de la atmósfera, sorprendiéndose al observar que esta era mucho mayor de lo esperado. Así fue como Hess descubrió el origen de los rayos cósmicos [21].

Estos son una combinación de partículas subatómicas, núcleos pesados, fotones, etc. en distintas proporciones que atraviesan el universo: acelerados por los campos magnéticos existentes en el espacio exterior, son “chorros” de partículas de los que todavía no se tiene muy claro su origen. Posibles fuentes emisoras son estrellas enanas rojas (entre las que se encuentra nuestro Sol) o explosiones de supernovas, que emiten gran cantidad de materia y principalmente electrones a altas velocidades. Estas partículas pueden llegar a la atmósfera terrestre, provocando una lluvia de rayos cósmicos: mediante colisiones con núcleos de distintos átomos de la atmósfera pueden crearse partículas como piones, los productos más

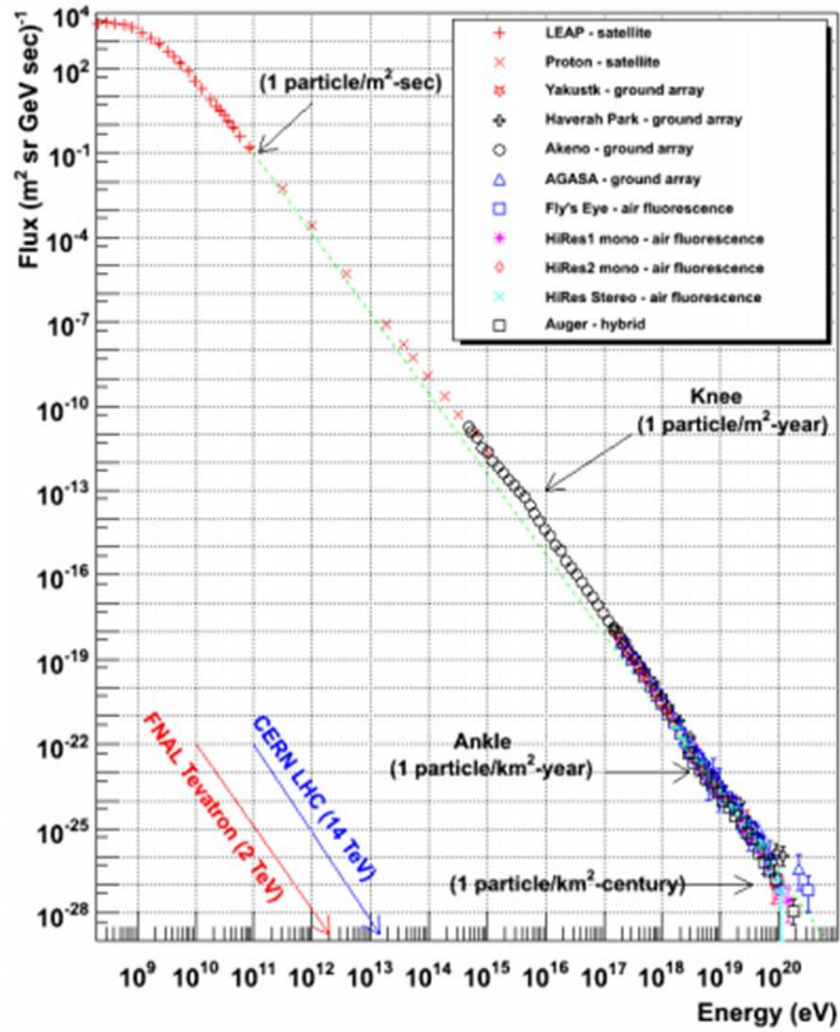


Figura 2.1: Espectros de energía procedentes de rayos cósmicos según distintos experimentos [20].

comunes en estas reacciones y generados a partir de protones [1]:

$$p + \gamma \rightarrow p + \pi^0 \quad (2.1)$$

$$p + \gamma \rightarrow n + \pi^+ \quad (2.2)$$

Estos piones a su vez pueden decaer emitiendo muones, que se caracterizan por que no interaccionan en gran medida con la materia, pudiendo llegar a la superficie de la Tierra y ser absorbidos por esta [1].

Así, electrones procedentes de estos rayos cósmicos pueden llegar a dispersar los fotones de la CMB hasta energías propias de los rayos gamma, que son detectados en la actualidad desde la Tierra [19].

2.3. Galaxias activas y radiogalaxias

La luz que percibimos ocupa un rango muy estrecho en el espectro electromagnético. Es por ello que la radiación procedente de muchos de los cuerpos estelares no son observables, y no fue hasta el estudio de las ondas de radio cuando se comenzaron a detectar fuentes muy potentes de estas. Las más importantes son las galaxias activas.

Las galaxias activas cuentan con una característica principal que las diferencia de cualquier otra: estas emiten jets o chorros de radiación procedentes de su centro, muy compacto. Este centro es sin duda la región más brillante de toda la galaxia, pudiendo emitir radiación infrarroja, ultravioleta, rayos X... Siendo las conocidas como radiogalaxias aquellas galaxias activas que emiten ondas de radio.

Como cualquier otra, las galaxias activas cuentan con un agujero negro en su interior que absorbe la materia cercana que lo rodea. Como resultado de esto, se crea un disco de acreción o crecimiento en su entorno a muy altas temperaturas formado por polvo y gases que en nuestro caso, puede ser una fuente importante de electrones relativistas para nuestro estudio del ICS. Además, este disco de acreción junto con su agujero negro pueden emitir

radiación en direcciones opuestas entre sí, y perpendiculares al disco: son los “chorros” o jets de una galaxia, que pueden llegar hasta nuestro planeta y ser detectados.

Capítulo 3

El efecto Sunyaev-Zeldóvich

Existen regiones en el Universo, principalmente cúmulos de galaxias, donde hay una alta densidad de gas ionizado muy caliente. Los fotones procedentes de la CMB, muy fríos, pasan por estas regiones y son dispersados por los electrones de dicho gas, ganando energía tras el proceso siguiendo la física del ICS. Esta dispersión se ve favorecida por el hecho de que la CMB está considerada como un ejemplo real de cuerpo negro, con una temperatura que se sitúa entorno a los 2,76K [10]. Esta dispersión provoca un desplazamiento o corrimiento hacia el azul por parte del espectro de la CMB en la vecindad de estos cúmulos de galaxias, resultando un buen indicador de la posición de un cúmulo en la CMB. Este es conocido como el efecto Sunyaev-Zeldóvich (o SZE, por sus siglas en inglés), descubierto en el año 1972 por los físicos Yákov Zeldóvich y Rashid Sunyaev.

Existen varios procesos que pueden generar el desplazamiento de la frecuencia de la CMB: por un lado, el provocado por los electrones tanto térmicos como no térmicos del entorno de las galaxias; y el conocido como SZE dinámico, debido al movimiento de la propia galaxia. En nuestro estudio nos centraremos sobre todo en el primero de ellos [11], no sin antes distinguir entre poblaciones térmicas y no térmicas de electrones.

Los electrones no térmicos son aquellos cuya energía cinética es mucho mayor que la energía térmica del ambiente, mientras que los térmicos son aquellos que tienen una

energía cinética comparable a la energía térmica del entorno [22]. Si nos paramos a pensar, estos últimos no serían adecuados para nuestro estudio puesto que no serían electrones relativistas. Sin embargo, en este caso el “ambiente” no está a los 300K a los que estamos acostumbrados, si no que en el entorno de una galaxia las temperaturas pueden alcanzar los miles de millones de Kelvin. De esta forma, tanto los electrones térmicos como no térmicos son relativistas, y por tanto ambas poblaciones son partícipes del ICS.

Es posible hacer una estimación de la temperatura de un cúmulo de galaxias en función de su masa y su radio haciendo uso del teorema del virial, a partir de la expresión [14]:

$$k_B T \sim \frac{GMm_H}{R}, \quad (3.1)$$

donde M es la masa total del cúmulo, R su radio y m_H la masa del átomo de hidrógeno. Así, para cúmulos de gran tamaño sus temperaturas pueden llegar a ser del orden de los 100 millones de Kelvin, como se comentó anteriormente.

De esta forma, nuestro principal objetivo a continuación será el cálculo de la distribución espectral de la radiación dispersada por este efecto, centrándonos en el estudio de una población no térmica de electrones y comparándolo con una aproximación al caso térmico a partir de la ecuación Kompaneets.

3.1. Cálculo del efecto Sunyaev-Zeldóvich

Considérese para empezar, un haz de fotones de la CMB que se cruza en su camino con una población de electrones relativistas (térmicos o no térmicos). Situándonos en el sistema de referencia en el que el límite de Thomson es válido (puesto que, en el rango de frecuencias en el que se trabaja en el límite Thomson, los resultados son acordes con las observaciones del SZE), la función de distribución de los fotones dispersados una sola vez por ICS es [10]:

$$P_1(s) = \int_0^\infty f_e(p) P_s(s, p) dp, \quad (3.2)$$

donde $f_e(p)$ es la función de distribución del momento del electrón, $P_s(s, p)$ una función de distribución obtenida a partir de la física del ICS, y s el logaritmo neperiano de la relación entre las frecuencias anterior ν y posterior ν' a la colisión del fotón [12]:

$$s = \ln(t) = \ln\left(\frac{\nu'}{\nu}\right) \quad (3.3)$$

Es importante destacar que en todo el desarrollo se trabajará con un momento del electrón adimensional, definido como [12]:

$$p = \beta\gamma \quad (3.4)$$

La función $f_e(p)$ viene definida de diversas maneras dependiendo del tipo de población que se estudie. Existen expresiones sencillas para un conjunto de electrones de la misma energía, mientras que expresiones más complejas permiten estudiar conjuntos donde se combinan electrones de distintas energías.

Por otro lado, $P_s(s, p)$ es una función que de nuevo puede tomar distintas expresiones, dadas muchas de ellas de forma analítica en infinidad de artículos. En nuestro caso, seguiremos la expresión dada en [12], de tal forma que queda definida en función del momento p y el parámetro t .

Una vez calculada la función de distribución de los fotones dispersados una sola vez (3.2), es directo el cálculo de esta función para n choques debido al scattering continuo en el interior del cúmulo. A partir del producto de convolución de la función $P_1(s)$ modulada según la frecuencia del choque anterior, se tiene que [10]:

$$\begin{aligned} P_n(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(s_1) \dots P_1(s_{n-1}) P_1(s - s_1 \dots - s_{n-1}) ds_1 \dots ds_{n-1} = \\ &= P_1(s) \otimes \dots \otimes P_1(s) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Así, la función de distribución total viene expresada como la suma de todas las funciones $P_n(s)$, ponderada cada una de ellas por la probabilidad de Poisson de sufrir n dipersiones

distintas [10]:

$$P(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\tau} \tau^n}{n!} P_n(s), \quad (3.6)$$

donde τ es un parámetro conocido como profundidad óptica propia del cúmulo, que representa la “transparencia” de este. Para valores $\tau \gg 1$ el medio se considera ópticamente grueso, y ópticamente delgado para valores $\tau \ll 1$. Su expresión es:

$$\tau = \int \sigma_T n_e dl, \quad (3.7)$$

donde se considera que la integral se realiza a lo largo de una línea de longitud l que atraviesa el cúmulo de un extremo a otro de este, siendo σ_T la sección eficaz Thomson y n_e la densidad electrónica en el interior del cúmulo [11].

La profundidad óptica puede relacionarse con un parámetro conocido como el parámetro y de Compton, que es un factor útil en el estudio de una población térmica de electrones. Su expresión es [10]:

$$y = \frac{k_B T_e}{m_e c^2} \tau = \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \int n_e k_B T_e dl = \frac{k_B T_e \sigma_T n_e}{m_e c^2} ct, \quad (3.8)$$

donde T_e es la temperatura del cúmulo, del orden del millón de Kelvin. Una forma alternativa de mostrar la expresión (3.6) es desarrollando el sumatorio en función de la distribución $P_1(s)$:

$$P(s) = e^{-\tau} \left[\delta(s) + \tau P_1(s) + \frac{1}{2} \tau^2 P_1(s) \otimes P_1(s) + \dots \right] \quad (3.9)$$

Cabe destacar el hecho de que se ha sustituido $P_0(s)$ por una función delta de Dirac $\delta(s)$ puesto que, al no sufrir dispersión alguna el fotón al atravesar el cúmulo, es lógico que la frecuencia inicial y final de este sean las mismas ($s=0$).

A partir de esta distribución puede obtenerse el espectro resultante del SZE, de acuerdo con la ecuación [11]:

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(xe^{-s}) P(s) ds, \quad (3.10)$$

donde I_0 representa el espectro de la CMB antes de la dispersión que, como se comentó en la sección anterior, es prácticamente idéntica a la del cuerpo negro, por lo que puede modelarse siguiendo la ley de Planck [11]:

$$I_0(x) = 2 \frac{(k_B T_0)^3}{(hc)^2} \frac{x^3}{e^x - 1}, \quad (3.11)$$

siendo T_0 la temperatura de la CMB. El parámetro x es un factor adimensional que se define como el cociente entre la energía del fotón y la energía térmica del electrón [11]:

$$x = \frac{h\nu}{k_B T_0} \quad (3.12)$$

De estas dos expresiones se infiere que el desplazamiento de la radiación procedente de la CMB debido al SZE es simplemente la diferencia entre ambas expresiones, a la que llamaremos $\Delta I(x)$:

$$\Delta I(x) = I(x) - I_0(x) \quad (3.13)$$

En algunos casos es recomendable definir $\Delta I(x)$ en función del producto de una constante (con unidades iguales a las de $\Delta I(x)$) por el parámetro de Compton (3.8) y por una expresión $g(x)$, que es la que carga con la forma espectral de la función y la que representaremos, siendo además adimensional. Este criterio surge por comodidad puesto que en una aproximación de primer orden de la función $P(s)$ en el límite de difusión ($\tau \ll 1$), se elimina la dependencia de la función $\Delta I(x)$ con la profundidad óptica.

Por ello, el objetivo de nuestro estudio será encontrar esta expresión del desplazamiento de la radiación procedente de la CMB, $\Delta I(x)$, y observar cómo varía en función de los parámetros del cúmulo y la radiación [10], y se compararán además los distintos resultados obtenidos con las diferentes poblaciones electrónicas. Puesto que la expresión (3.9) es una suma infinita de términos, pueden realizarse algunas aproximaciones a partir del desarrollo en serie de τ de la expresión o un desarrollo más preciso a partir de la transformada de Fourier.

Transformada de Fourier de la función de distribución

Es posible obtener una solución precisa mediante la transformada de Fourier de la función $P(s)$, puesto que no se desprecia ningún término del desarrollo en serie (3.9).

Teniendo en cuenta que la transformada de Fourier de un producto de convolución de dos funciones es igual al producto de las transformadas de Fourier de ambas funciones, puede expresarse esta operación sobre (3.9) de la forma [10]:

$$\mathcal{F}[P(s)] = \mathcal{P}(k) = e^{-\tau} \left[1 + \tau \mathcal{P}_1(k) + \frac{1}{2} \tau^2 \mathcal{P}_1^2(k) + \dots \right] = e^{-\tau} e^{\tau \mathcal{P}_1(k)}, \quad (3.14)$$

donde la transformada de Fourier de la función $P_1(s)$ viene dada por:

$$\mathcal{F}[P_1(s)] = \mathcal{P}_1(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(s) e^{-iks} ds \quad (3.15)$$

por la definición de transformada de Fourier.

Y siguiendo la definición de la transformada inversa de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(w) e^{iwt} dw \quad (3.16)$$

se obtiene la expresión exacta para la distribución total buscada:

$$P(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(k) e^{iks} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} e^{\tau \mathcal{P}_1(k)} e^{iks} dk, \quad (3.17)$$

que permite conservar todos los términos del desarrollo en una sola integral al realizar el cálculo de (3.10).

Expansión de orden n en τ

La expresión (3.9) puede tomarse sin aplicar una transformada de Fourier, pero con la consecuencia de que en este caso deberán despreciarse algunos términos para el cálculo de $I(x)$. Una primera aproximación y en la que nos centraremos nosotros viene dada en [10] considerando la aproximación de difusión $\tau \ll 1$. De esta forma, los términos a partir del orden τ^2 pueden considerarse despreciables en la expresión (3.9):

$$e^{-\tau} \simeq 1 - \tau, \quad P(s) \simeq \delta(s) + \tau(P_1(s) - \delta(s)) \quad (3.18)$$

$$\Delta I(x) \simeq \tau \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(xe^{-s})P_1(s)ds - I_0(x) \quad (3.19)$$

Para hacer más sencillo el cálculo, puede relacionarse $\Delta I(x)$ con la función $g(x)$ como se comentó anteriormente, eliminando la profundidad óptica en esta primera aproximación:

$$g(x) = C \frac{\Delta I(x)}{y}, \quad C = \frac{(hc)^2}{2(K_B T_0)^3} \quad (3.20)$$

$$g(x) = \frac{m_e c^2}{k_B T_e} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} i_0(xe^{-s})P_1(s)ds - i_0(x) \right], \quad (3.21)$$

donde se ha definido $i_0(x)$ como:

$$i_0(x) = \frac{(hc)^2}{2(k_B T_0)^3} I_0(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}, \quad (3.22)$$

y una aproximación adecuada para el cociente entre la masa en reposo del electrón y la energía térmica del cúmulo viene dada en [10]:

$$\frac{k_B T_e}{m_e c^2} = \frac{\alpha - 1}{6[p^{1-\alpha}]_{p_2}^{p_1}} \left[B_{\frac{1}{1+p^2}} \left(\frac{\alpha - 2}{2}, \frac{3 - \alpha}{2} \right) \right]_{p_2}^{p_1}, \quad (3.23)$$

siendo la expresión $B_x(a, b)$ la función beta incompleta [13]:

$$B_x(a, b) = \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt \quad (3.24)$$

Con todos estos parámetros, es posible representar la función $g(x)$ y observar la forma espectral de la curva para el desplazamiento de la intensidad de la CMB debido al SZE.

Aproximaciones más precisas pueden considerarse tomando más términos en el desarrollo de $P(s)$, complicándose los cálculos pero obteniéndose resultados mucho más precisos y cada vez más similares al calculado a partir de la transformada de Fourier de la función $P(s)$.

3.2. Aplicación a una población no térmica de electrones

En nuestro estudio nos centraremos sobre todo en el cálculo del SZE para una población no térmica, por lo que debemos escoger adecuadamente la expresión de la función $f_e(p)$.

La distribución más sencilla que concuerda con los estudios realizados anteriormente para el SZE con una población no térmica viene dada por la expresión [10]:

$$f_e(p) \propto p^{-\alpha}, \quad p_1 \leq p \leq p_2, \quad (3.25)$$

donde α es una constante dependiente de los parámetros del cúmulo, y p_1 y p_2 son los valores máximo y mínimo del momento del conjunto de electrones.

Puesto que es una función de distribución esta debe estar normalizada a la unidad, por lo que puede elegirse como constante de proporcionalidad el parámetro A [10]:

$$A(p_1, p_2, \alpha) = \frac{\alpha - 1}{p_1^{1-\alpha} - p_2^{1-\alpha}}, \quad (3.26)$$

tal que se cumple la condición de normalización:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{\alpha - 1}{p_1^{1-\alpha} - p_2^{1-\alpha}} p^{-\alpha} dp = 1 \quad (3.27)$$

A partir de esta función $f_e(p)$ la expresión de la función de distribución $P_s(t, p)$ tomará la forma dada en [12]:

$$P_s(t, p) = -\frac{3 |1 - t|}{32p^6 t} [1 + (10 + 8p^2 + 4p^4)t + t^2] + \frac{3(1 + t)}{8p^5} \left[\frac{3 + 3p^2 + p^4}{\sqrt{1 + p^2}} - \frac{3 + 2p^2}{2p} (2\text{arcsenh}(p) - |\ln t|) \right] \quad (3.28)$$

Debemos tener en cuenta que esta expresión viene dada en función del parámetro t , por lo que debe hacerse el cambio de variable:

$$P_s(s, p) ds = P_s(t, p) e^s ds, \quad (3.29)$$

si queremos expresarla en función de s , tal que la expresión final en este caso será [12]:

$$P_s(s, p) = -e^s \frac{3 |1 - e^s|}{32p^6 e^s} [1 + (10 + 8p^2 + 4p^4)e^s + e^{2s}] + \frac{3(1 + e^s)}{8p^5} \left[\frac{3 + 3p^2 + p^4}{\sqrt{1 + p^2}} - \frac{3 + 2p^2}{2p} (2\text{arcsenh}(p) - |s|) \right] \quad (3.30)$$

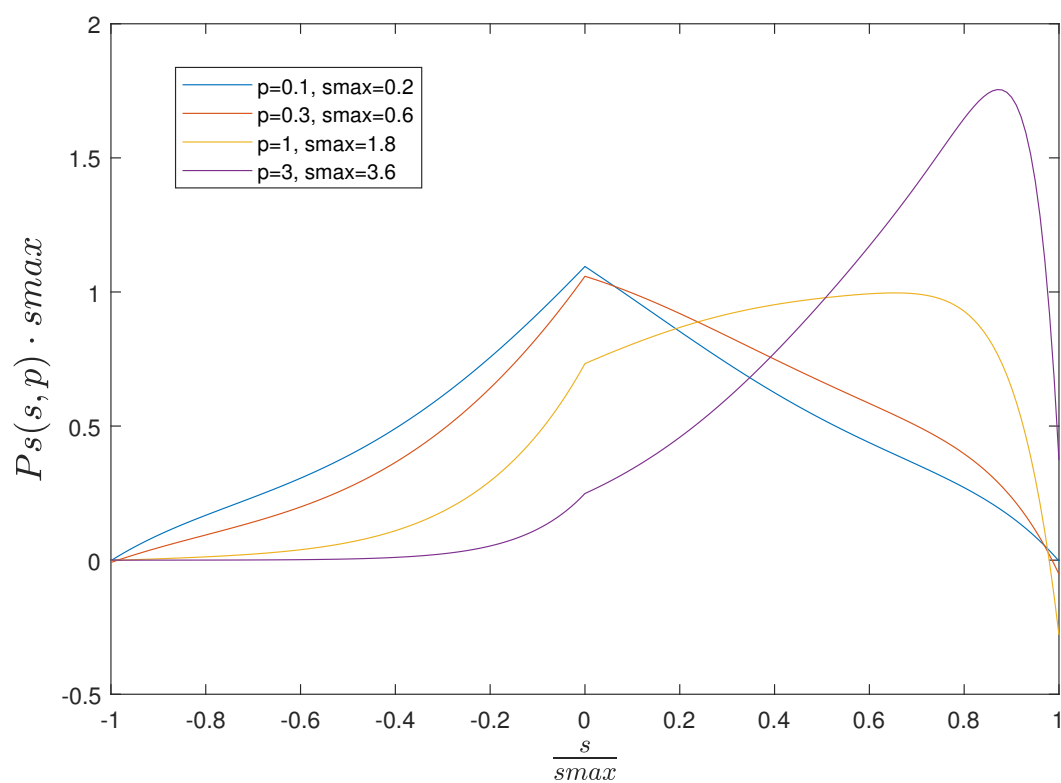


Figura 3.1: Representación de $P_s(s, p) \times s_{max}$ frente a $\frac{s}{s_{max}}$, para parejas de valores $p = 0, 1, 0, 3, 1, 3$, $s_{max} = 0, 2, 0, 6, 1, 8, 3, 6$.

Puede representarse esta expresión en función de un parámetro variable s_{max} y distintos valores del momento p , como se observa en la figura (3.1). De acuerdo con las expresiones (3.2), (3.25) y (3.26) puede calcularse la función $P_1(s)$ obteniéndose la expresión [12]:

$$P_1(s) = \frac{\alpha - 1}{p_1^{1-\alpha} - p_2^{1-\alpha}} \frac{3}{16} (1 + e^s) \left[-B_{\frac{1}{1+p^2}} \left(\frac{1+\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2} \right) - B_{\frac{1}{1+p^2}} \left(\frac{3+\alpha}{2}, -\frac{2+\alpha}{2} \right) \right. \\ \left. \frac{7+3\alpha}{3+\alpha} - B_{\frac{1}{1+p^2}} \left(\frac{5+\alpha}{2}, -\frac{4+\alpha}{2} \right) \frac{12+3\alpha}{5+\alpha} + p^{-5-\alpha} \left\{ \left(\frac{3}{5+\alpha} + \frac{2p^2}{3+\alpha} \right) \right. \right. \\ \left. \left. (2\text{arcsenh}(p) - |s|) + \left| \frac{1-e^s}{1+e^s} \right| \left(\frac{1+e^{2s}}{2(5+\alpha)e^s} + \frac{5}{5+\alpha} + \frac{4p^2}{3+\alpha} + \frac{2p^4}{1+\alpha} \right) \right\} \right]_{p_{min}}^{p_{max}}, \quad (3.31)$$

donde p_{max} viene definido como el valor máximo de la pareja de valores $(p_2, \frac{\sqrt{e^s}}{2})$ y p_{min} el valor máximo de $(p_1, \frac{\sqrt{e^s}}{2})$. Es importante imponer una condición que anule esta expresión para valores muy grandes y muy pequeños del parámetro s (o t), puesto que estos casos la función diverge rápidamente: tomemos que $|s| > 2\text{arcsenh}(p_2)$ [12].

La función (3.31) se representa para distintos valores de la constante α fijando los parámetros p_1 y p_2 , y variando p_1 para valores fijos de p_2 y α en las figuras (3.2) y (3.3), respectivamente. En la figura (3.3) puede observarse cómo a medida que aumenta el valor del momento inicial del electrón, el centro de la función $P_1(s)$ se va desplazando hacia valores mayores de s , aumentando por tanto la frecuencia final del fotón tras la colisión. Para el caso por ejemplo de un momento mínimo de $p_1 = 10000$, s está centrada aproximadamente en 20, por lo que el cambio en la frecuencia es del orden de $\frac{\nu'}{\nu} \approx 5 \cdot 10^8$, obteniéndose longitudes de onda milimétricas de los fotones dispersados.

A partir de la expresión (3.31) es posible obtener los valores sucesivos de $P_n(s)$, donde n indica el número de colisiones entre el fotón y el electrón en el interior del cúmulo, como se puede observar en la ecuación (3.5). Así, el siguiente paso será el cálculo de la expresión de $P(s)$.

Siguiendo la aproximación de difusión calculada en la sección anterior, se representa en la figura (3.4) la función $g_{nt}(x)$ (donde el subíndice nt indica que estamos trabajando con poblaciones no térmicas de electrones) para valores fijos de las constantes p_2 y α , variando el parámetro p_1 . Puede observarse en esta figura que mientras el valor mínimo de la función

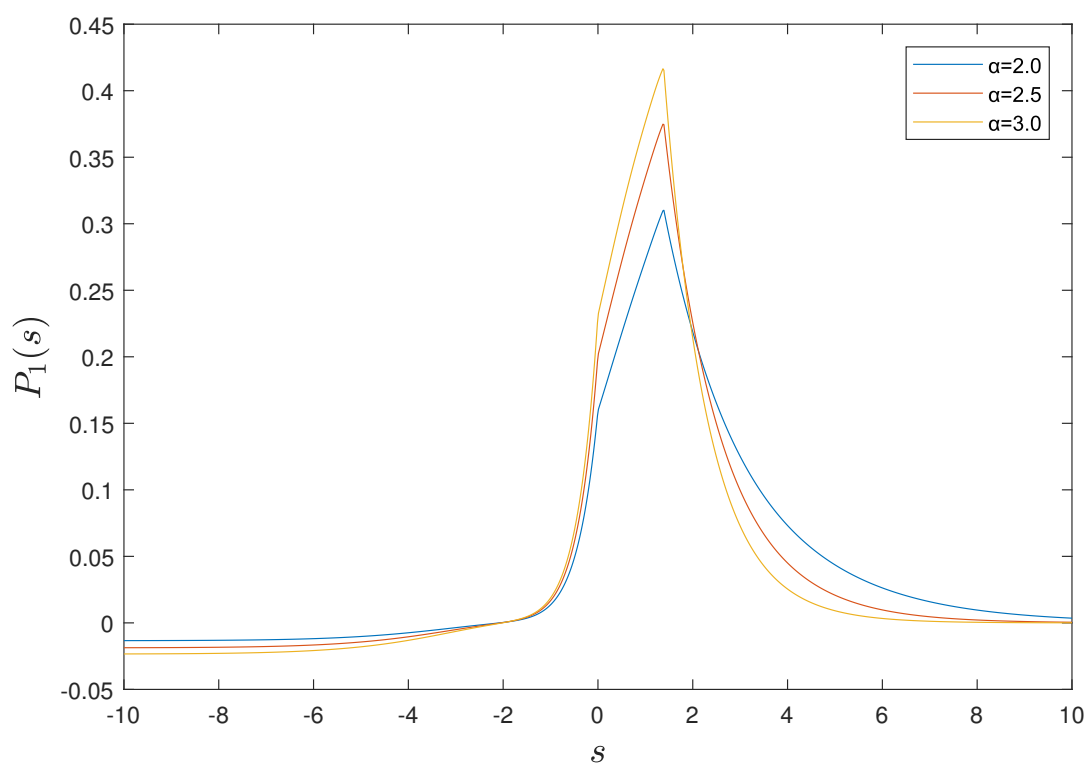


Figura 3.2: Representación de $P_1(s)$ frente a s para valores $p_1 = 1$, $p_2 = 10$ y $\alpha=2, 2.5, 3$.

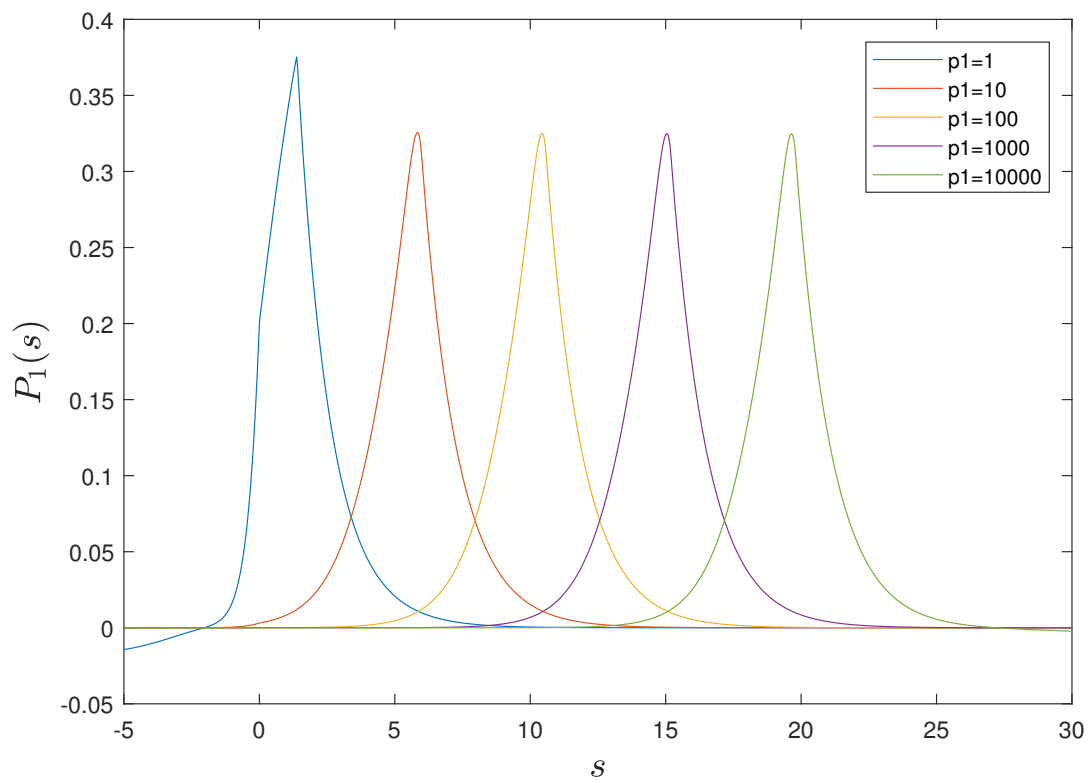


Figura 3.3: Representación de $P_1(s)$ frente a s para valores $\alpha = 2,5$, $p_2 \rightarrow \infty$ y $p_1 = 1, 10, 100, 1000, 10000$.

$g_{nt}(x)$ es igual sea cual sea el valor del momento p_1 , el valor máximo no es el mismo y además, vemos que a medida que aumenta p_1 el punto de corte con el eje de abscisas va desplazándose hacia frecuencias mayores. Esto último implica que el desplazamiento de la intensidad de radiación $\Delta I(x)$ se anula (la radiación que recibimos es exactamente la que emite la CMB $I_0(x)$) cada vez a frecuencias iniciales del fotón mayores (frecuencia inicial del fotón ν proporcional a x).

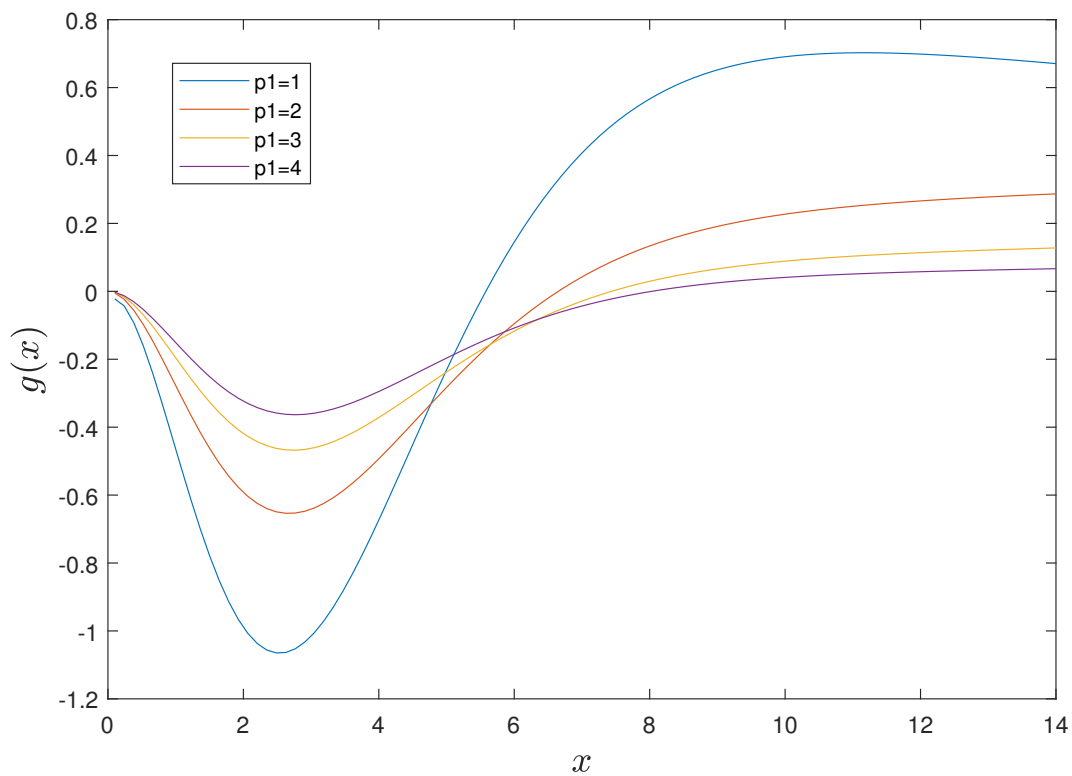


Figura 3.4: Representación de $g_{nt}(x)$ frente a x para valores $\alpha = 2.5$, $p_2 = 1000$ y $p_1 = 1, 2, 3, 4$.

3.3. Electrones térmicos: la ecuación Kompaneets

Un estudio análogo al anterior puede realizarse para una población térmica de electrones, tan sólo cambiando la expresión de la función f_e . Sin embargo, en este caso su expresión no es tan sencilla como en la situación no térmica (3.25) puesto que existe una dependencia cuadrático-exponencial de $f_e(p)$ con el momento p , complicándose los cálculos de integración enormemente [12]:

$$f_e(p) = \frac{\beta_t}{K_2(\beta_t)} p^2 e^{-\beta_t \sqrt{1+p^2}}, \quad (3.32)$$

donde β_t es el cociente $\frac{m_e c^2}{k_B T_e}$, y $K_2(\beta_t)$ la función modificada de Bessel de segunda especie.

Por suerte existe una ecuación, conocida como ecuación Kompaneets, cuya representación se asemeja con gran fidelidad a la obtenida para el caso térmico del SZE [10].

Con una estructura similar a la de una ecuación de difusión, puede deducirse a partir de la ecuación de Fokker-Planck y reducirse a una expresión dependiente del parámetro y de Compton (3.8), el factor adimensional x (3.12) y n , que representa el número de ocupación de los fotones en el interior del cúmulo [15]:

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right] \quad (3.33)$$

La solución de esta ecuación da una expresión para la variación del espectro del fotón en interior del cúmulo, debido a las dispersiones con los electrones térmicos. Esta es una ecuación compleja que puede ser resuelta en casos muy concretos con simetrías simples y mediante simulación. Consideremos en nuestro caso la aproximación más sencilla, que consiste en tomar una solución para n siguiendo la estadística de Bose-Einstein: el número de ocupación para un gas de bosones (fotones en nuestro caso) es [15]:

$$n(x) = \frac{1}{e^x - 1}, \quad (3.34)$$

donde se ha tenido en cuenta que el potencial químico μ para la radiación del cuerpo negro es nulo [16].

Por lo tanto, derivando e introduciendo la expresión (3.34) en (3.33), se obtiene:

$$\Delta n = \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} \left[\frac{x(e^x + 1)}{e^x - 1} - 4 \right] y = yg_t(x), \quad (3.35)$$

donde en este caso el subíndice t indica que nos encontramos en el caso de electrones térmicos.

Para poder comparar el resultado obtenido con la variación de la intensidad recibida por el SZE, se relaciona el parámetro n con la intensidad I , de tal forma que:

$$\Delta n \propto \Delta I \quad (3.36)$$

$$\Delta I = C yg(x), \quad (3.37)$$

donde C es la constante de proporcionalidad entre Δn y ΔI .

De esta forma, hemos obtenido una aproximación a la desviación de la intensidad de radiación recibida de la CMB debido a la dispersión por una población de electrones térmicos [10]. La expresión de la función $g_t(x)$ se representa en la figura (3.5).

3.4. Comparación entre electrones térmicos y no térmicos

A pesar de que la forma espectral de la figura (3.4) es similar a la obtenida en la figura (3.5), si comparamos ambas observamos la gran diferencia existente entre ellas en la figura (3.6). Una de las diferencias más claras es sin duda el desplazamiento del cero de la función a frecuencias mayores en el caso no térmico que en el térmico: a partir de este cero, el incremento de intensidad pasa a ser positivo. Por otro lado, puede observarse que a frecuencias iniciales del fotón grandes, el SZE térmico pasa a ser irrelevante, pero sigue siendo ligeramente importante el SZE no térmico.

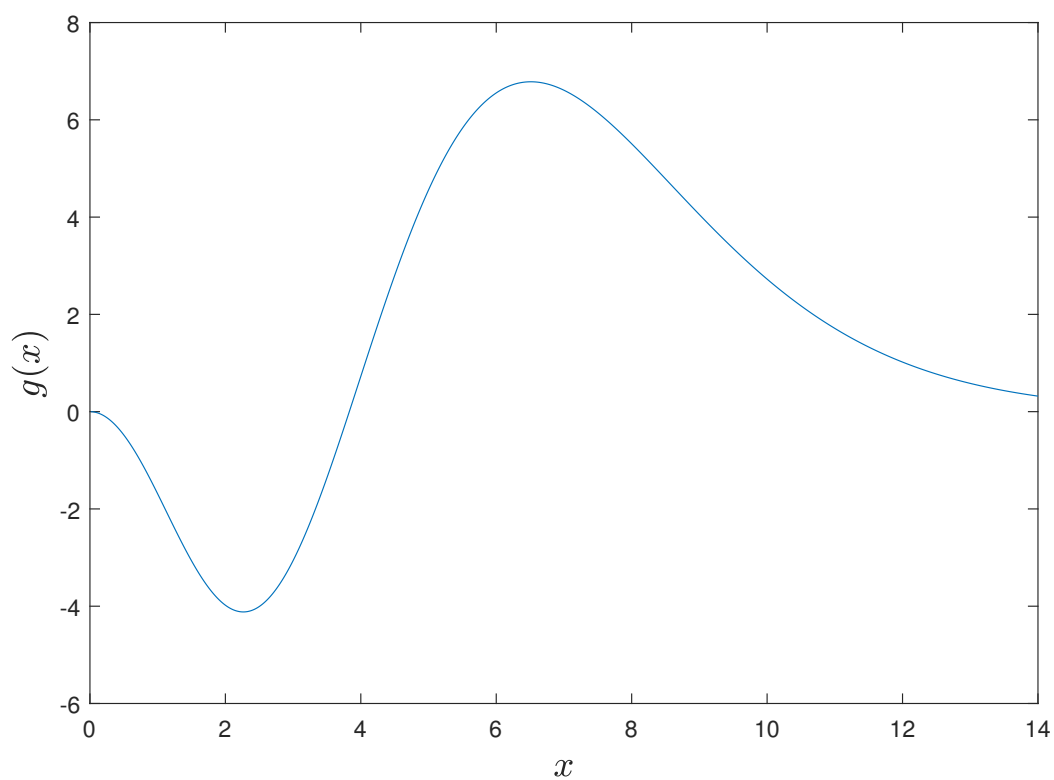


Figura 3.5: Aproximación al espectro de radiación dispersado por una población de electrones térmicos a partir de la ecuación Kompaneets.

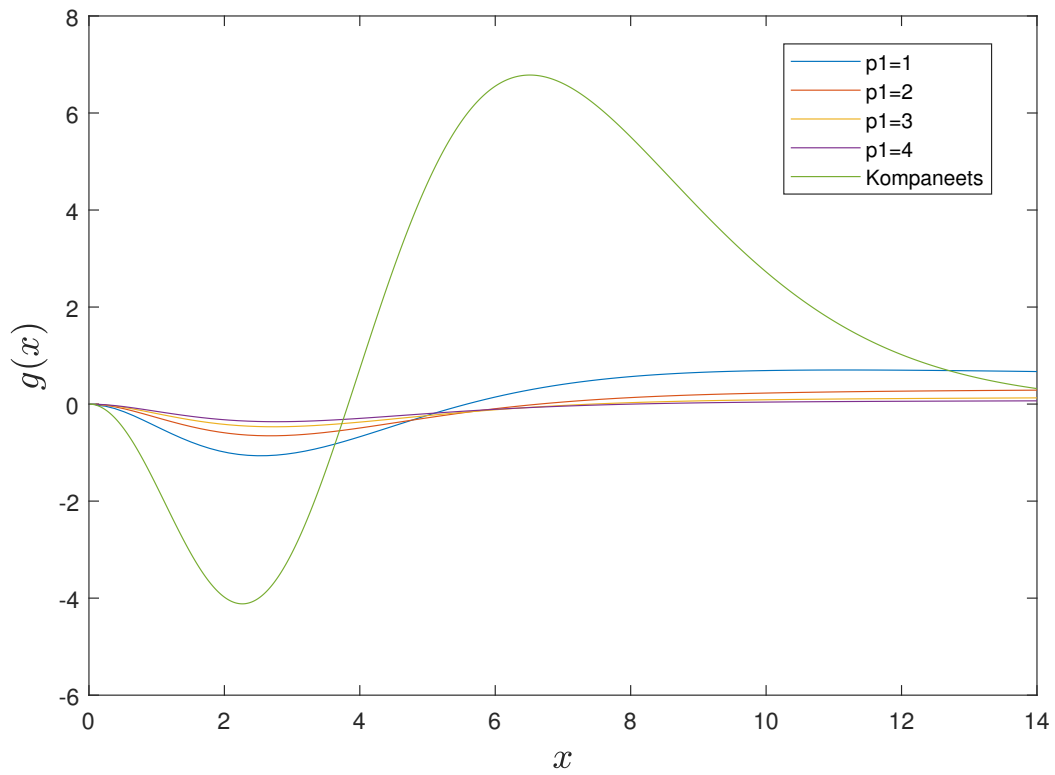


Figura 3.6: Función $g_t(x)$ obtenida mediante la aproximación de la ecuación Kompaneets y función $g_{nt}(x)$ para el caso no térmico en la aproximación de difusión para distintos valores del momento p_1 .

3.5. SZE dinámico: galaxias en movimiento

En la introducción a este capítulo se hizo mención a una variación del SZE basada en el movimiento de las galaxias. Hasta este momento tan solo hemos tenido en cuenta las dispersiones de los fotones de la CMB basadas en el movimiento aleatorio de los electrones en el interior de una galaxia. Sin embargo, el SZE dinámico es un método que resulta útil, por ejemplo, para calcular la velocidad peculiar de estas galaxias o de cualquier cuerpo estelar que pueda producir este efecto de dispersión [17].

A partir de la ecuación de Boltzmann y considerando un sistema de referencia en el cual los electrones se encuentren en reposo, es posible hacer un cálculo transformando el número de ocupación de estos electrones mediante transformaciones de Lorentz, y resultando de esta forma un desplazamiento de la intensidad recibida igual a [18]:

$$\Delta I(x) = C g_{din}(x) = C \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2}, \quad (3.38)$$

donde la constante de proporcionalidad C depende del factor β de la galaxia y su velocidad a lo largo de la línea de visión, además de la profundidad óptica del cúmulo [18]. Si comparamos este efecto con los calculados anteriormente puede obtenerse la contribución total del SZE a la dispersión de la CMB, observándose claras diferencias entre el efecto térmico, no térmico y dinámico en la figura (3.7).

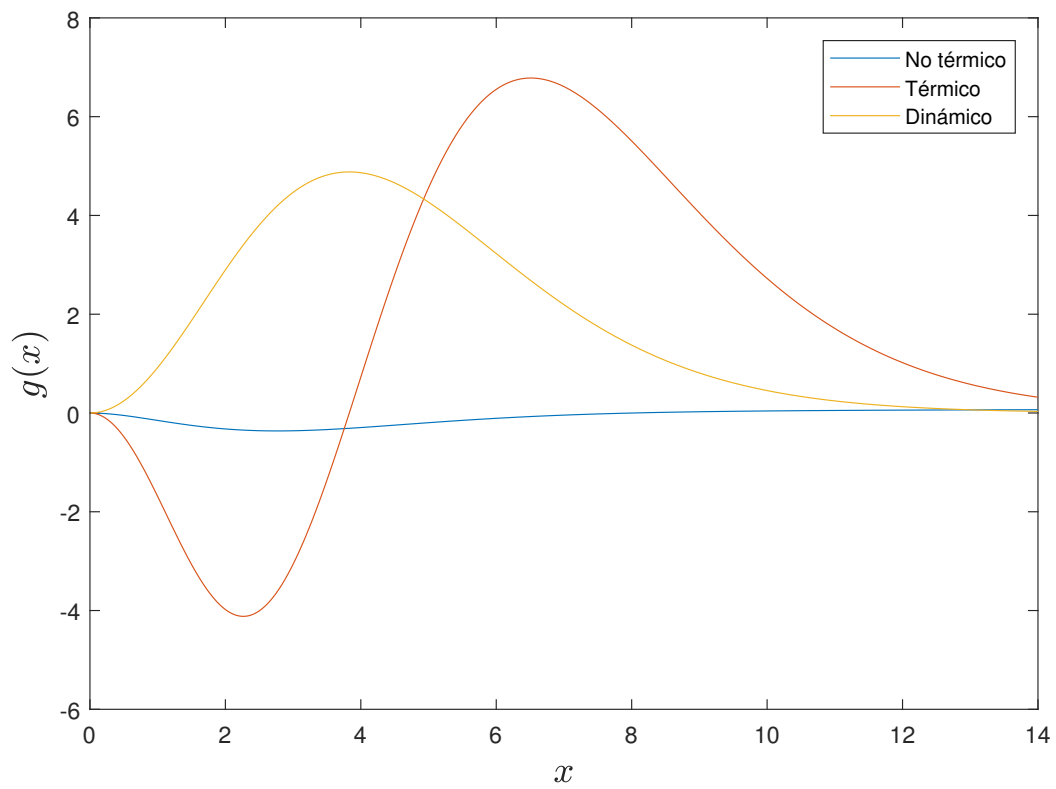


Figura 3.7: Representación de las tres aportaciones del SZE a la dispersión de fotones procedentes de la CMB.

Conclusiones

Se ha realizado en un primer capítulo un estudio de la sección eficaz total de la dispersión Compton, y mediante una representación gráfica en coordenadas polares hemos comprobado la distribución angular de la dispersión. Además, hemos podido estudiar la potencia de un haz de fotones tras ser dispersado por efecto Compton inverso, observándose sus semejanzas con la potencia emitida por radiación sincrotrón.

Por último se ha realizado un estudio del efecto Sunyaev-Zeldóvich y las tres manifestaciones que tiene en los lóbulos de galaxias muy calientes. Para el caso no térmico se ha realizado una aproximación que consiste en considerar tan solo los primeros términos del desarrollo de la función de distribución total. Puede comprobarse en la literatura que esta aproximación es buena en comparación con el caso exacto a medida que va disminuyendo la profundidad óptica, lo cual es hasta cierto punto predecible ya que la aproximación de difusión aplicada se fundamenta en este hecho ($\tau \ll 1$). Para el caso térmico la función de distribución de momentos se hacía muy compleja para poder realizar cálculos numéricos, por lo que se ha procedido a hacer una aproximación mediante una ecuación de difusión que se asemeja muy bien a los resultados esperados (véase [10], figura 1). Por último, se ha observado el papel que tiene el movimiento de la propia galaxia sobre la dispersión de los fotones de la CMB, y se han comparado los tres SZE gráficamente observándose los rangos de frecuencia en los cuáles actúa cada uno, y la magnitud de la intensidad dispersada en cada caso. Todos estos cálculos numéricos coinciden con datos recientes de la literatura, y suponen una herramienta útil para estudios futuros sobre este efecto.

Bibliografía y referencias

- [1] M. Harwit, “Astrophysical concepts”, Springer-Verlag New York Inc., 1988
- [2] David J. Griffiths, “Introduction to electrodynamics”, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999
- [3] Volker Beckmann, “Inverse Compton Scattering”, Wiley-VCH, Berlin
- [4] George R. Blumenthal, Robert J. Gould, “Bremsstrahlung, Synchrotron Radiation, and Compton Scattering of High-Energy Electrons Traversing Dilute Gases”, Reviews of modern physics, Volume 42, Number 2, April 1970
- [5] Bernhard A. Ludewigt, Vladimir V. Mozin, Andrew R. Haefner and Brian J. Quiter, “Using Nuclear Resonance Fluorescence for Nondestructive Isotopic Analysis”
- [6] I. Jovanovic, Y. Yin, S. Boucher, R. Tikhoplav, G. Travish, “Laser systems for inverse Compton scattering gamma-ray source for photofission”, University of California, Los Angeles, January 2010
- [7] Calin A. Ur, “Gamma Beam System at ELI-NP”, Extreme Light Infrastructure, IFIN-HH, Magurele-Bucharest, Romania, 2015, 244
- [8] X. Chen, Y. Wu, H. Dong, C. Y. Zhang, Y. Zhang, “Platinum-Based Agents for Individualized Cancer Treatment”, Current Molecular Medicine, Volume 13, Issue 10, abstract, 2013
- [9] Hideo Hirayama, “Lecture Note on Photon Interactions and Cross Sections”, High Energy Accelerator Research Organization, Japan, October 2000

- [10] S. Colafrancesco, P. Marchegiani, E. Palladino, “The non-thermal Sunyaev-Zeldóvich effect in clusters of galaxies”, Osservatorio -astronomico di Roma, Dipartimento di Fisica, Università di Roma, August 2002
- [11] Siddharth Malu, Abhirup Dtta, Sergio Colafrancesco, Paolo MArchegiani, Ravi Subrahmanyam, D. Narasimha, Mark. H. Wieringa, “Relativistic inverse Compton scattering of photons from the early universe”, Centre of astronomy, Indian Institute of Technology Indore, Simrol, Khandwa Road, Indore, 453552, India, December 2017
- [12] T. A. Enßlin, C. R. Kaiser, “Comptonization of the Cosmic Microwave Background by Relativistic Plasma”, Max-Planck-Institut für Astrophysik, Karl-Schwarzschild-Str.1, Garching, Germany, June 2000
- [13] Milton Abramowitz, Irene A. Stegun, “Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables”, U. S. Department of Commerce, 1965
- [14] G. Cotter, “High-Energy Astrophysics”, Department of Physics, University of Oxford, High Energy Astrophysics MT Lecture 9, 2016
- [15] M.Sampoorna, “Compton Scattering in Astrophysics”, Indian Institute of Science, December 2003
- [16] P. Würfel, “The chemical potential of radiation”, Institut für Angewandte Physik, University of Karlsruhe, January 1982
- [17] E. Audit, J.F.L. Simmons, “The kinematic Sunyaev-Zeldóvich effect and transverse cluster velocities”, Laboratoire d’Astrophysique Extragalactique et de Cosmologie, Department of Physics and Astronomy of University of Glasgow, December 1998
- [18] M. Birkinshaw, “The Sunyaev-Zeldóvich Effect”, Department of Physics, University of Bristol, August 1998
- [19] C.S. Shen, G. Berkey, “Cosmic gamma rays from inverse Compton scattering”, Physics department, Purdue University, Lafayette, Indiana, The Astrophysical Journal, Vol. 151, March 1968

-
- [20] R. Blandforda, P. Simeona, Y. Yuana, “Cosmic Ray Origins: An Introduction”, KIPAC, Stanford University, September 2014
- [21] CERN website, “Cosmic rays: particles from outer space”, September 2012
- [22] D.C. Murphya, M.S. Sanz, C.F. Pelloa, “The role of non-thermal electrons in flame acceleration”, Department of Mechanical Engineering University of California, Departamento Ingeniería Térmica y de Fluidos Universidad Carlos III de Madrid, April 2017
- [23] R.H. Dicke, P.J.E. Peebles, P.G. Roll, D.T. Wilkinson, “Cosmic black-body radiation”, Palmer Physical Laboratory Princeton, New Jersey, May 1965
- [24] E. J. Wollack, “Tests of Big Bang: The CMB” ,National Aeronautics and Space Administration, September 2016

Facultad de física US
Avda. Reina Mercedes, S/N
CP 41012
Sevilla, España
13 de junio de 2018

Anexo

Figura 1.2 (MatLab)

```
clear;
clc;

%Escribimos la función que representa el cociente de las dos secciones
eficaces
sigmas = @(x) (3/4).*(log(1+2.*x)./(2.*x)-
(1+3.*x)./((1+2.*x).^2)+((1+x)./(x.^2)).*((2.*(1+x))./(1+2.*x)-
(log(1+2.*x))./(x))));
%Definimos el vector sobre el que representaremos la función
xe =0:0.01:1000;

%Hacemos una representación semilogarítmica de la función
semilogx(xe,sigmas(xe),'-b');
xlabel('$\alpha$', 'Interpreter','latex')
ylabel('$\frac{\sigma_C}{\sigma_T}$', 'Interpreter','latex')
```

Figura 1.3 (Mathematica)

```
Manipulate[PolarPlot[{0.5*(1/(1+alpha*(1-
Cos[theta])))^2*((1/(1+alpha*(1-Cos[theta]))) +1+alpha*(1-
Cos[theta]) (Sin[theta]^2),1},{theta,0,Pi*2},
{alpha, 0,10}]
```

Figura 3.1 (MatLab)

```
clear;
clc;

%Definimos una serie de vectores vacíos donde iremos almacenando la
información sobre cada una de las curvas
v=[];
w=[];
x=[];
y=[];
%Definimos el vector sobre el que representaremos la función
a=-1:0.01:1;

for s_smax=-1:0.01:1
p=0.1;
smax=0.2;
s=s_smax*smax;
f=@(s) (exp(s))*((-3*abs(1-(exp(s))))/(32*p^6*(exp(s)))*...
(1+(exp(s))^2+(exp(s))*(10+8*p^2+4*p^4)+(3*(1+(exp(s)))))...
*((3+3*p^2+p^4)/(sqrt(1+p^2))-(3+2*p^2)*(2*asinh(p)-...
abs(log((exp(s)))))/(2*p))/(8*p^5));
v=[v,f(s)*smax];
```

```

end

for s_smax=-1:0.01:1
p=0.3;
smax=0.6;
c=s_smax*smax;
g=@(c) (exp(c)) * ((-3*abs(1-(exp(c)))) / (32*p^6*(exp(c)))*...
    (1+(exp(c))^2+(exp(c))*(10+8*p^2+4*p^4))+(3*(1+(exp(c)))))...
    * ((3+3*p^2+p^4)/(sqrt(1+p^2))-(3+2*p^2)*(2*asinh(p))-...
    abs(log((exp(c)))))/(2*p))/(8*p^5));
w=[w,g(c)*smax];
end

for s_smax=-1:0.01:1
p=1;
smax=1.8;
d=s_smax*smax;
h=@(d) (exp(d)) * ((-3*abs(1-(exp(d)))) / (32*p^6*(exp(d)))*...
    (1+(exp(d))^2+(exp(d))*(10+8*p^2+4*p^4))+(3*(1+(exp(d)))))...
    * ((3+3*p^2+p^4)/(sqrt(1+p^2))-(3+2*p^2)*(2*asinh(p))-...
    abs(log((exp(d)))))/(2*p))/(8*p^5));
x=[x,h(d)*smax];
end

for s_smax=-1:0.01:1
p=3;
smax=3.6;
e=s_smax*smax;
i=@(e) (exp(e)) * ((-3*abs(1-(exp(e)))) / (32*p^6*(exp(e)))*...
    (1+(exp(e))^2+(exp(e))*(10+8*p^2+4*p^4))+(3*(1+(exp(e)))))...
    * ((3+3*p^2+p^4)/(sqrt(1+p^2))-(3+2*p^2)*(2*asinh(p))-...
    abs(log((exp(e)))))/(2*p))/(8*p^5));
y=[y,i(e)*smax];
end

%Representamos cada una de las curvas sobre una única gráfica
plot(a,v)
hold on
plot(a,w)
hold on
plot(a,x)
hold on
plot(a,y)
xlabel('$\frac{s}{smax}$','Interpreter','latex')
ylabel('$Ps(s,p)\cdot smax$','Interpreter','latex')
legend('p=0.1, smax=0.2','p=0.3, smax=0.6','p=1, smax=1.8','p=3, smax=3.6'
,'Location','northwest')

```

Figura 3.2 (MatLab)

%Definimos una función que necesita unos parámetros de entrada que dependerán de las condiciones de cada curva

```
function [v, a] = PlsA(N)
```

```

p1=N(1);
p2=N(2);
alfa1=N(3);
alfa2=N(4);
alfa3=N(5);

```

```

a = linspace(-10, 10, 1000);
v = zeros([3, length(a)]);

pmin = a_mayor_que_log(a, p1);
pmax=p2;
alfa=[alfa1,alfa2,alfa3];

for jj = 1:length(alfa)
    for ii = 1:length(a)
        B1=@(t) t.^((1+alfa(jj))/2-1).*(1-t).^(-alfa(jj)/2-1);
        B1int=integral(B1,1./(1+pmin(ii)^2),1/(1+pmax^2));

        B2=@(t) t.^((3+alfa(jj))./2-1).*(1-t).^(-(2+alfa(jj))./2-1);
        B2int=integral(B2,1./(1+pmin(ii)^2),1/(1+pmax^2));

        B3=@(t) t.^((5+alfa(jj))./2-1).*(1-t).^(-(4+alfa(jj))./2-1);
        B3int=integral(B3,1./(1+pmin(ii)^2),1/(1+pmax^2));

        fs=@(s) (exp(s)).*((alfa(jj)-1)./(p1.^(1-alfa(jj))-p2.^(1-
        alfa(jj))).*3.*(1+exp(s))./16.*(-B1int-B2int.*(7+3.*alfa(jj))
        ./(3+alfa(jj))-B3int.*(12+3.*alfa(jj))./(5+alfa(jj)))+
        (alfa(jj)-1)./(p1.^(1-alfa(jj))-p2.^(1-alfa(jj))).*3.*(1+
        exp(s))./16.*(pmax.^(-5-alfa(jj)).*(3./(5+alfa(jj))+
        (2.*pmax.^2)./(3+alfa(jj))).*(2.*asinh(pmax)-abs(s))+
        (abs((1-exp(s))./(1+exp(s))))).*((1+(exp(s)).^2)./(2.*exp(s)
        .* (5+alfa(jj)))+(5)./(5+alfa(jj)))+(4.*pmax.^2)./(3+alfa(jj))+
        (2.*pmax.^4)./(1+alfa(jj))))-(pmin(ii).^(-5-alfa(jj)).*
        ((3./(5+alfa(jj)))+(2.*pmin(ii).^2)./(3+alfa(jj))).*(2.*
        asinh(pmin(ii))-abs(s)))+(abs((1-exp(s))./(1+exp(1).^s))).*
        ((1+(exp(s)).^2)./(2.*exp(s).*(5+alfa(jj)))+(5)./(5+alfa(jj)))+(
        4.*pmin(ii).^2)./(3+alfa(jj)))+(2.*pmin(ii).^4)./(1+
        alfa(jj))))))));

        v(jj, ii)=fs(a(ii));
    end

end

uno=v(1,:);
dos=v(2,:);
tres=v(3,:);

plot(a,uno)
hold on
plot(a,dos)
hold on
plot(a,tres)
xlabel('$s$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$P_1(s)$', 'Interpreter', 'latex')
legend('$\alpha=2.0$', '$\alpha=2.5$', '$\alpha=3.0$')

end

%Hacemos una función adicional que permita imponer las condiciones que
se muestran tras la ecuación (3.31)
function pmin = a_mayor_que_log(a, p1)
    pmin = zeros(size(a));
    for ii = 1:length(a)
        if a(ii)<=log(4*p1^2)
            pmin(ii) = p1;
        end
    end
end

```

```

        else
            pmin(ii) = exp(a(ii)/2)/2;
        end
    end
end
end

```

Figura 3.3 (MatLab)

```

function [v, a] = PlsSOLO(N)

p1=N(1);
p2=N(2);
alfa=N(3);

a = linspace(-5, 30, 1000);
v = zeros(size(a));

pmin = a_mayor_que_log(a, p1);
pmax=p2;

for ii = 1:length(a)
    B1= @(t) t.^((1+alfa)/2-1).*(1-t).^(-alfa/2-1);
    B1int=integral(B1,1./(1+pmin(ii)^2),1/(1+pmax^2));

    B2=@(t) t.^((3+alfa)./2-1).*(1-t).^(-(2+alfa)./2-1);
    B2int=integral(B2,1./(1+pmin(ii)^2),1/(1+pmax^2));

    B3=@(t) t.^((5+alfa)./2-1).*(1-t).^(-(4+alfa)./2-1);
    B3int=integral(B3,1./(1+pmin(ii)^2),1/(1+pmax^2));

    fs=@(s) (exp(s)).*((alfa(jj)-1)./(p1.^(1-alfa(jj))-p2.^(1-
    alfa(jj)))).*3.*(1+exp(s))./16.*(-B1int-B2int.*(7+3.*alfa(jj))
    ./(3+alfa(jj))-B3int.*(12+3.*alfa(jj))./(5+alfa(jj)))+
    (alfa(jj)-1)./(p1.^(1-alfa(jj))-p2.^(1-alfa(jj)))).*3.*(1+
    exp(s))./16.*((pmax.^(-5-alfa(jj))).*(3./(5+alfa(jj))+
    (2.*pmax.^2)./(3+alfa(jj))).*(2.*asinh(pmax)-abs(s))+
    (abs((1-exp(s))./(1+exp(s))))).*(1+(exp(s)).^2)./(2.*exp(s)
    .*(5+alfa(jj)))+(5)./(5+alfa(jj)))+(4.*pmax.^2)./(3+alfa(jj))+
    (2.*pmax.^4)./(1+alfa(jj))))-(pmin(ii).^(-5-alfa(jj)).*
    ((3./(5+alfa(jj)))+(2.*pmin(ii).^2)./(3+alfa(jj))).*(2.*
    asinh(pmin(ii))-abs(s)))+(abs((1-exp(s))./(1+exp(s))).*
    ((1+(exp(s)).^2)./(2.*exp(s).*(5+alfa(jj)))+(5)./(5+alfa(jj))+
    (4.*pmin(ii).^2)./(3+alfa(jj)))+(2.*pmin(ii).^4)./(1+
    alfa(jj))))))));

    v(ii)=fs(a(ii));

end

plot(a,v)
xlabel('$s$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$P_1(s)$', 'Interpreter', 'latex')
end

function pmin = a_mayor_que_log(a, p1)
    pmin = zeros(size(a));
    for ii = 1:length(a)
        if a(ii)<=log(4*p1^2)

```



```

        pmin(ii) = p1;
    else
        pmin(ii) = exp(a(ii)/2)/2;
    end
end
end
end

```

Este programa ejecuta una sola de las tres curvas de la figura 3.2. No se han hecho en un único programa ya que el tiempo de ejecución del programa se alargaba mucho. Mediante la herramienta hold on puede ejecutarse el programa tres veces y solapar en una misma gráfica las tres curvas.

Las figuras (3.4), (3.5), (3.6) y (3.7) se han obtenido a partir de combinaciones de las funciones $g_{nt}(x)$, $g_{din}(x)$ y la aproximación de Kompaneets (o $g_t(x)$), para distintos valores de los parámetros α , p_1 y p_2 . Al igual que antes, se solaparon las curvas mediante la herramienta hold on y ejecutando cada uno de los programas siguientes.

$g_{nt}(x)$ (MatLab)

```

function [v, xlin] = NoTermica(N)

p1=N(1);
p2=N(2);
alfa=N(3);

uno=(alfa-2)/2;
dos=(3-alfa)/2;
%Definimos la constante C que multiplica a la función según la
ecuación (3.23)
Carg = @(t) t.^(uno-1).*(1-t).^(dos-1);
Cint=integral(@(t) Carg(t),1/(1+p1^2),1/(1+p2^2));
C=-(Cint*(alfa-1)/(6*(p1^(1-alfa)-p2^(1-alfa))))^(-1);

xlin = linspace(0.1, 30, 100);
v = zeros(size(xlin));

pmin = @(t) max(p1,sqrt(t)/2);
pmax = @(t) max(p2,sqrt(t)/2);

barg = @(t,a,b) t.^(a-1).*(1-t).^(b-1);
B=@(x,a,b) integral(@(t) barg(t,a,b),0,x);

for ii = 1:length(xlin)

    A=@(x,t) ((x./t).^3)./(exp(x./t)-1);

    primera=@(t) (alfa-1)./(p1^(1-alfa)-p2^(1-
    alfa)).*(3./16).*(1+t);
    segundaA=@(t) -B(1./(1+pmax(t).^2),(1+alfa)/2,-alfa/2);
    segundaB=@(t) -B(1./(1+pmin(t).^2),(1+alfa)/2,-alfa/2);
    terceraA=@(t) -B(1./(1+pmax(t).^2),(3+alfa)/2,-
    (2+alfa)/2).*((7+3.*alfa)./(3+alfa));
    terceraB=@(t) -B(1./(1+pmin(t).^2),(3+alfa)/2,-
    (2+alfa)/2).*((7+3.*alfa)./(3+alfa));
    cuartaA=@(t) -B(1./(1+pmax(t).^2),(5+alfa)/2,-
    (4+alfa)/2).*((12+3.*alfa)./(5+alfa));
    cuartaB=@(t) -B(1./(1+pmin(t).^2),(5+alfa)/2,-
    (4+alfa)/2).*((12+3.*alfa)./(5+alfa));

```

```

quintaA=@(t) pmax(t).^(-5-
alfa).*((3)./(5+alfa)+(2.*pmax(t).^2)./(3+alfa)).*(2.*asinh(pmax(t))-
abs(log(t)));
quintaB=@(t) pmin(t).^(-5-
alfa).*((3)./(5+alfa)+(2.*pmin(t).^2)./(3+alfa)).*(2.*asinh(pmin(t))-
abs(log(t)));
sextaA=@(t) pmax(t).^(-5-alfa).*abs((1-
t)./(1+t)).*((1+t.^2)./(2.*(5+alfa).*t)+(5)./(5+alfa)+(4.*pmax(t).^2).
/(3+alfa)+(2.*pmax(t).^4)./(1+alfa)));
sextaB=@(t) pmin(t).^(-5-alfa).*abs((1-
t)./(1+t)).*((1+t.^2)./(2.*(5+alfa).*t)+(5)./(5+alfa)+(4.*pmin(t).^2).
/(3+alfa)+(2.*pmin(t).^4)./(1+alfa)));

P1=@(t) primera(t).*(segundaA(t)-segundaB(t)+terceraA(t)-
terceraB(t)+cuartaA(t)-cuartaB(t)+quintaA(t)-quintaB(t)+sextaA(t)-
sextaB(t));

fs=@(t,x) A(x,t).*P1(t);

j=@(x) integral(@(t) fs(t,x),exp(-2*asinh(p2)),
exp(2*asinh(p2)),'ArrayValued',true);
i=@(x) x.^3./(exp(x)-1);
v(ii)=C.*(j(xlin(ii))-i(xlin(ii)));

end
plot(xlin,v)
end

```

Kompaneets (o $g_t(x)$) (MatLab)

```

clear
clc
gt = @(x) ((x.^4.*exp(x))./((exp(x)-1).^2)).*(x.*exp(x)+x)./(exp(x)-
1)-4);
xe =linspace(0,14,1000);
plot(xe,gt(xe));
xlabel('$x$', 'Interpreter','latex')
ylabel('$g(x)$', 'Interpreter','latex')

```

$g_{din}(x)$ (MatLab)

```

clear
clc
gdin = @(x) (x.^4.*exp(x))./((exp(x)-1).^2);
xe =linspace(0,14,1000);
plot(xe,gdin(xe));
xlabel('$x$', 'Interpreter','latex')
ylabel('$g(x)$', 'Interpreter','latex')

```